



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ

ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ-ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

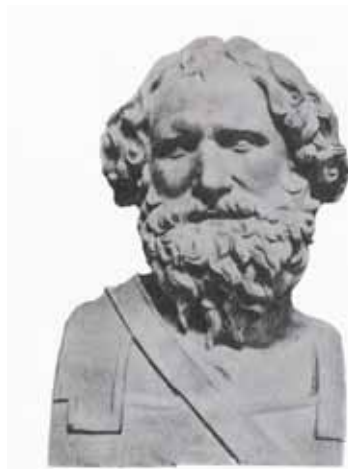
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

“ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ”

Διπλωματική εργασία

**«Διδακτική προσέγγιση του εμβადού της έλλειψης με αναφορά στο έργο Σφαιροειδή
και Κωνοειδή του Αρχιμήδη»**



ΣΤΕΦΑΝΑΚΗ ΣΤΑΜΑΤΙΝΑ

Επιβλέπων καθηγητής

Γιαννακούλιας Ευστάθιος

ΑΘΗΝΑ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2008

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την/2/2008 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1. Γιαννακούλιας Ευστάθιος (επιβλέπων καθηγητής)	Αναπλ.Καθηγητής	
2. Ζαχαριάδης Θεοδόσιος	Αναπλ.Καθηγητής	
3. Λάμπας Διονύσιος	Αναπλ. Καθηγητής	



Αναγεννησιακή απεικόνιση του Αρχιμήδη, ενώ σχεδιάζει με το διαβήτη.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή.....

Ο βίος του Αρχιμήδη

- Λίγα λόγια για τον κοινωνικό του περίγυρο.
- Η αλληλογραφία του Αρχιμήδη.
- Ο Αρχιμήδης ως αστρονόμος.
- Διηγήσεις για τον Αρχιμήδη.
- Ο θάνατος του Αρχιμήδη.

Κεφάλαιο 1.....

Περί των έργων του Αρχιμήδη.

- 1.1 Η γλώσσα των έργων του Αρχιμήδη.
- 1.2 Τα σωζόμενα έργα του Αρχιμήδη.
- 1.3 Τα χαμένα έργα του Αρχιμήδη.
- 1.4 Κείμενα που αναφέρονται στη συλλογή Fihrist.
- 1.5 Πίνακας χαμένων έργων.
- 1.6 Πίνακας για τους κώδικες.
- 1.7 Πίνακας έργων που περιέχονται στους κώδικες.
- 1.8 Οι εκδόσεις των έργων του Αρχιμήδη.

Κεφάλαιο 2.....

Οι μηχανικές ανακαλύψεις του Αρχιμήδη.

- 2.1 Εισαγωγή.
- 2.2 Το πυκνόμετρο ή αραιόμετρο.
- 2.3 Μια αστρονομική συσκευή.
- 2.4 Ο βαρούλκος, η υδροσκοπία και η πνευματική.
- 2.5 Τα κάτοπτρα.
- 2.6 Ο κοχλίας ή έλιξ.
- 2.7 Το οδόμετρο ή δρομόμετρο.
- 2.8 Το πλανητάριο ή σφαίρα.
- 2.9 Το πολύσπαστο.
- 2.10 Το σιφόνι.

- 2.11 Το τηλεβόλο.
- 2.12 Το χαριστίωνα.
- 2.13 Το υδραυλικό ρολόι.

Κεφάλαιο 3.....

Τα έργα του Αρχιμήδη

- 3.1 Το Παλίμψηστο του Αρχιμήδη
- 3.2 Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου α' και β
- 3.3 Κύκλου Μέτρησις
- 3.4 Περί κωνοειδών και σφαιροειδών
- 3.5 Περί ελίκων
- 3.6 Μηχανικά ή επιπέδων ισορροπιών ή κέντρα βάρων επιπέδων α' και β
- 3.7 Ο Ψαμμίτης
- 3.8 Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής
- 3.9 Έφοδος
- 3.10 Βιβλίο Λημμάτων
- 3.11 Το Βοεικό πρόβλημα του Αρχιμήδη
- 3.12 Το Στομάχιον

Κεφάλαιο 4.....

Ο υπολογισμός του εμβαδού της έλλειψης

Επίλογος.....

Οι επιρροές που άσκησε ο Αρχιμήδης

Βιβλιογραφία.....

Εισαγωγή

Ο βίος του Αρχιμήδη

Για να προσδιορίσουμε την ημερομηνία γέννησης του μεγάλου αυτού Έλληνα μαθηματικού χρησιμοποιούμε κάποιον έμμεσο τρόπο, δηλαδή την ημερομηνία θανάτου του, η οποία χρονολογείται γύρω στο 212 π.Χ.¹. Από την πληροφορία που μας δίνει ο ιστοριοδίφης Ιωάννης Τζέτζης², σύμφωνα με την οποία όταν ο Αρχιμήδης ήταν 75 χρονών τον φόνεψε κάποιος Ρωμαίος στρατιώτης κατά τη διάρκεια της άλωσης της πόλεως των Συρακουσών³, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι γεννήθηκε περίπου το 287 π.Χ.

«Ο Αρχιμήδης ο σοφός, μηχανητής εκείνος, τω γένει Συρακούσιος ην, γέρων γεωμέτρης, χρόνους τε εβδομήκοντα και πέντε παρελαύνων [...]».

(Ο Αρχιμήδης, ο σοφός, ο μηχανικός εκείνος που καταγόταν από τις Συρακούσες, γέρος γεωμέτρης, έζησε εβδομήντα πέντε χρόνια[...]).

Όσο αφορά την καταγωγή του, λίγα μπορούν να ειπωθούν με βεβαιότητα. Σύμφωνα με την πληροφορία που μας δίνει ο Κικέρωνας⁴ καταγόταν από πτωχή οικογένεια.

«[...]ex eadem urbe humilem homunculum a pulvere et radio excitabo, qui multis annis post fuit, Archimedes[...]».

([...]επιθυμώ από αυτή την πόλη, (τις Συρακούσες) να θυμηθώ έναν ταπεινό άνθρωπο της άμμου και του σχεδιαστικού κανόνα, τον Αρχιμήδη[...]).

Το ίδιο υποστηρίζει και ο Σίλιος ο Ιταλικός⁵ αφού γράφει στην πραγματεία του (η οποία σώζεται στα λατινικά):

¹ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α, σελίς 1.

² 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 182.

³ Οι Συρακούσες ήταν αποικία των Κορινθίων στη Σικελία που έχει ιδρυθεί τον 8^ο π.Χ. αιώνα.

⁴ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 216.

⁵ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 239.

([...])βρισκόταν λοιπόν σε αυτή την πόλη ένας άνθρωπος, η μεγαλύτερη δόξα του αιώνα του, ο Αρχιμήδης ο οποίος χάρη στην μεγαλοφυΐα του ανυψώθηκε πολύ από τους άλλους θνητούς. Ήταν πτωχός, αλλά ο ουρανός και η γη αποκάλυψαν τις εμπνεύσεις του).

Διαβάζοντας την πραγματεία του Πλούταρχου «*Βίοι παράλληλοι, Μάρκελλος*» αποσπάμε την πληροφορία ότι ήταν συγγενής του βασιλιά των Συρακουσών Ιέρωνος και ότι στο λουτρό τον συνόδευαν υπηρέτες.

«Ο Αρχιμήδης λοιπόν ων συγγενής και φίλος του βασιλέως Ιέρωνος[...]πολλές φορές δε συρόμενος υπό των υπηρετών διά το άλειμμα (μέ λάδι) και το λουτρόν, έγραφεν είς την εστίαν (εις τήν στάχτην) γεωμετρικά σχήματα, καί εν ω το σώμα ητο αλημμένον μέ λάδι έγραφεν μέ τόν δάκτυλόν του γραμμάς κατεχόμενος υπό μεγάλης ηδονής καί ων αληθώς μουσόληπτος[...]».

(Ο Αρχιμήδης λοιπόν ο οποίος ήταν συγγενής και φίλος του βασιλιά Ιέρωνα[...]πολλές φορές δε συνοδευόμενος από τους υπηρέτες στο λουτρό για την επάλειψη με λάδι, έγραφε στην στάχτη γεωμετρικά σχήματα και καθώς το σώμα του ήταν αλειμμένο με λάδι έγραφε με το δάχτυλό του γραμμές, κατεχόμενος από μεγάλη ηδονή και αληθινά μουσόληπτος[...]).

Ακόμα περισσότερες πληροφορίες για τη σχέση των δύο αυτών ανδρών παίρνουμε από το κεφάλαιο «*Περί Ηρακλείου* ζς'» του έργου του Ιωάννη Τζέτζη το οποίο φέρει τον τίτλο «*Χιλιάδες*»⁶.

«Ούτος ο Συρακούσιος πάνσοφος Αρχιμήδης ήτο του Ιέρωνος του βασιλέως των Συρακουσών σύμβουλος, φίλος, γραμματεύς, γενικός μηχανικός[...]».

(Αυτός ο Συρακούσιος πάνσοφος Αρχιμήδης, ήταν του Ιέρωνα βασιλιά των Συρακούσιων σύμβουλος, φίλος, γραμματέας, γενικός μηχανικός[...]).

⁶ 'Χιλιάδες' V32, ν. 970 – 974, Σταμάτης 185.

Λίγα λόγια για τον κοινωνικό του περίγυρο

Η παραμονή του Αρχιμήδη στην Αλεξάνδρεια μνημονεύεται από τον Διόδωρο. Εκεί ο Αρχιμήδης δημιούργησε φιλίες με σπουδαίους μαθηματικούς όπως οι προαναφερθέντες Κώνων ο Σάμιος, ο Ερατοσθένης, ο Κυρηναίος και ο Δοσίθεος.

Ο πατέρας του Αρχιμήδη ήταν ο αστρονόμος Φειδίας και είχε υπολογίσει το πηλίκο των διαμέτρων του ήλιου και της σελήνης, σύμφωνα με μαρτυρία του ίδιου, στην εισαγωγή της πραγματείας του «Ψαμμίτης»⁷. Το γεγονός ότι κάποιος Άραβας συγγραφέας αποκαλεί τον Αρχιμήδη «*υιό του Πυθαγόρα*» δεν το λαμβάνουμε σοβαρά υπόψη μας, αφού οι Άραβες συγγραφείς συνήθιζαν να γράφουν για τις ζωές των Ελλήνων προκατόχων τους, χρησιμοποιώντας τη φαντασία τους.

Επίσης, δε θεωρούμε ότι ισχύει η πληροφορία που μας παρέχει ο Linceo Mirabello ότι ο Αρχιμήδης ήταν μαθητής του Πλάτωνα, επειδή κάτι τέτοιο δεν μπορεί να ισχύει για χρονολογικούς λόγους αφού ο Πλάτωνας είχε πεθάνει 60 χρόνια πριν από τη γέννηση του Αρχιμήδη. Τέλος, ο David Rivault στην έκδοση που συνέταξε το 1615 γράφει ότι είχε ακούσει από έναν πολυμαθή Έλληνα φίλο ότι η μάρτυς Santa Lucia ήταν απόγονος του σπουδαίου Αρχιμήδη.

Το βέβαιο πάντως είναι ότι το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του έζησε στις Συρακούσες, ενώ σύμφωνα με Άραβες συγγραφείς ένα μεγάλο διάστημα το πέρασε στην Αίγυπτο και αφότου επέστρεψε επισκέφτηκε και άλλες χώρες μέσα στις οποίες συγκαταλέγεται και η Ισπανία. Εκεί, όπως υποστηρίζει ο Leonardo da Vinci, διάβασε στην Ιστορία των Ισπανών, ο Αρχιμήδης βοήθησε τον βασιλιά Ecliderides του Cilodastri, σε έναν θαλάσσιο πόλεμο εναντίον των Άγγλων με την ανακάλυψη μιας συσκευής για αναβλύζουσα καμένη πίσσα στα καράβια των αντιπάλων. Την επίσκεψη του όμως αυτή στην Ισπανία επιβεβαιώνει κατά κάποιο τρόπο και ο Διόδωρος, αφού αναφέρει ότι το χρυσό μέταλλο που χρησιμοποίησε ο Αρχιμήδης στην κατασκευή του κοχλίου ήταν ισπανικής προελεύσεως.

⁷ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α.- Μαρτυρία 43.

Η αλληλογραφία του Αρχιμήδη

Ο Αρχιμήδης ήταν μοναχικός τύπος. Όταν ήταν νέος είχε σπουδάσει για ένα διάστημα στην Αλεξάνδρεια των Αιγύπτων, όπου ανέπτυξε φιλία με τον Κόνωνα, ένα ταλαντούχο μαθηματικό τον οποίο εκτιμούσε ως άνθρωπο και ως διανοητή, καθώς και με τον Ερατοσθένη, έναν επίσης καλό μαθηματικό. Ο Αρχιμήδης συνήθιζε να στέλνει τα κείμενά του, άλλοτε με αποδείξεις και άλλοτε χωρίς, στους συναδέλφους του στην Αλεξάνδρεια και ιδίως στον Ερατοσθένη και στον Κόνωνα (στον οποίο όταν αναφερότανε, μίλαγε με μεγάλο πάντα θαυμασμό) και στο μαθητή του Δοσίθεο περιμένοντας την γνώμη τους. Αυτά τα γραπτά τα συνόδευε από εισαγωγικές επιστολές οι οποίες συνήθως περιείχαν μια περίληψη των προτάσεων που κάθε φορά αποδείκνυε. Μερικές φορές μάλιστα οι εισαγωγικές αυτές επιστολές αποτελούνταν και από προτάσεις προηγούμενων επιστολών.

Αρχικά έστελνε στους φίλους του μαθηματικούς μονάχα τις προτάσεις προτείνοντας τους να τις σχολιάσουν. Τους παρότρυνε να βρουν μόνοι τους τις αποδείξεις και υποστήριζε ότι αυτό έπρεπε να το κάνουν για τον εαυτό τους. Όπως γράφει ο ίδιος ο Αρχιμήδης στην εισαγωγή της πραγματείας του *«Περί ελίκων»* ήθελε να δώσει την ευχαρίστηση στους φίλους του μαθηματικούς να τις ανακαλύψουν οι ίδιοι. Η ολοκληρωμένη και σωστή απόδειξη ακολουθούσε έπειτα από κάποιο χρονικό διάστημα απεσταλμένη από τον ίδιο. Μάλιστα, μερικές φορές χρειάστηκε να περάσουν χρόνια προτού ο Αρχιμήδης, υπό την πίεση των φίλων του, δημοσιεύσει πλήρεις αποδείξεις των προτάσεών του⁸. Χάρη σε αυτήν τη διαδικασία που ακολουθούσε είμαστε σε θέση να συμπεράνουμε λεπτομέρειες σχετικές με τη σειρά με την οποία ο Αρχιμήδης έκανε τις ανακαλύψεις του και επιπλέον πληροφορίες σχετικές με τη δημοσιοποίησή τους. Τέλος, τη φήμη που απέκτησε ο Αρχιμήδης δεν την όφειλε μονάχα στις επιστολές αυτές που συνήθιζε να στέλνει. Ακόμα και πριν από αυτά, το έργο του πάνω στην αστρονομία είχε διαδοθεί και εκτιμηθεί ευρέως και η ευφυΐα του σε συνδυασμό με το εφευρετικό του πνεύμα είχε προκαλέσει μεγάλο θαυμασμό.

Διαβάζοντας την εισαγωγή του έργου του Αρχιμήδη *«Περί ελίκων»* συνειδητοποιούμε ότι είχαν περάσει αρκετά χρόνια από την πρώτη έκδοση των προτάσεων και των προβλημάτων που περιείχε το έργο *«Περί σφαίρας και κυλίνδρου»* μέχρι την επικοινωνία του Αρχιμήδη για δεύτερη φορά με τους μαθηματικούς στην Αλεξάνδρεια. Μάλιστα, με μια επιστολή του ο Αρχιμήδης αποκάλυψε ότι δύο προτάσεις που ο ίδιος έδωσε για την σφαίρα, ήταν λανθασμένες και ο λόγος ο οποίος τον ώθησε να κάνει αυτή την κίνηση

⁸ B.L. Van Der Waerden, *‘Η απόπνιση της επιστήμης’*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000, σελίς 245.

ήταν γιατί ήθελε να παραπλανήσει εκείνους τους μαθηματικούς οι οποίοι συνήθιζαν να καυχούνται λέγοντας ότι οι ίδιοι είχαν ανακαλύψει όσα ο Αρχιμήδης τους έδινε με τα γράμματα του χωρίς όμως να δίνουν τις αντίστοιχες αποδείξεις. Όπως γράφει χαρακτηριστικά στην εισαγωγή του έργου του *«Περί ελίκων»*, άφηνε καμιά φορά να του ξεφύγουν λίγες λανθασμένες προτάσεις *«ώστε εκείνοι οι οποίοι λένουν ότι τα βρίσκουν όλα, χωρίς όμως να παρουσιάζουν καμία απόδειξη, να ελέγχονται ότι ισχυρίζονται πως βρίσκουν τα αδύνατα»*⁹. Αν διαβάσει κανείς την ειρωνικά εγκωμιαστική εισαγωγή της πραγματείας του Αρχιμήδη *«Μέθοδος»*, θα μπορούσε να σκεφτεί ότι στόχος αυτής της παρατήρησης ίσως ήταν ο Ερατοσθένης.

Ο Αρχιμήδης είχε αφιερώσει τα έργα του *«Περί των μηχανικών θεωρημάτων έφοδος»* ή απλά *«Έφοδος»* και το *«Βοεικό πρόβλημα»* στον φίλο του Ερατοσθένη τον Κυρηναίο. Τις πραγματείες του *«Περί σφαίρας και κυλίνδρου»*, *«Περί κωνοειδών και σφαιροειδών»*, *«Περί ελίκων»* και *«Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής»* τις είχε αφιερώσει στον Δοσίθεο. Τέλος, στον Γέλωνα - υιό και συμβασιλέα του Ιέρωνα – είχε αφιερώσει την πραγματεία του *«Ψαμμίτης»*. Το γεγονός ότι δεν περιέχουν αφιερώσεις οι πραγματείες του *«Κύκλου μέτρησις»*, *«Οχουμένων»*, *«Στομάχιον»*, *«Βιβλίο λημμάτων»* και *«Επιπέδων ισορροπιών ή κέντρα βαρών επιπέδων»*, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι είναι πιθανόν να έφτασαν στα χέρια μας ελλιπείς.



⁹ B.L. Van Der Waerden, *‘Η αφύπνιση της επιστήμης’*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000, σελίς 245.

Ο Αρχιμήδης ως αστρονόμος

Στην περίοδο της μεγαλύτερης άνθησης των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, ο μαθηματικός και αστρονόμος Αρίσταρχος ο Σάμιος παρατήρησε το θερινό ηλιοστάσιο. Όπως αναφέρει ο Αρχιμήδης στην πραγματεία του «Ψαμμίτης»¹⁰, ο Αρίσταρχος πρότεινε την τολμηρή υπόθεση ότι η γη περιφέρεται σε κύκλο γύρω από τον ήλιο, την οποία όμως οι περισσότεροι αστρονόμοι της εποχής απέρριψαν, τεκμηριώνοντας την άποψή τους με ισχυρά επιχειρήματα. Ένα από τα επιχειρήματα, ενάντια στη περιστροφή της γης γύρω από τον ήλιο, είναι ότι κάτι τέτοιο θα απαιτούσε αδιάκοπες αλλαγές στις φαινόμενες αποστάσεις μεταξύ των απλανών αστέρων. Για να αντιμετωπίσει αυτή τη δυσκολία ο Αρίσταρχος υποστήριξε ότι η σφαίρα των απλανών αστέρων έχει ακτίνα τόση μεγάλη που η τροχιά της γης θα μπορούσε να θεωρηθεί σαν ένα απλό σημείο σε σύγκριση με αυτή.

Το μόνο από τα έργα του Αρίσταρχου που έχει σωθεί είναι η πραγματεία «Περὶ μεγεθῶν και αποστημάτων ηλίου και σελήνης», στην οποία ο Αρίσταρχος από μερικές υποθέσεις που προέκυψαν από παρατηρήσεις διατυπώνει τις ακόλουθες προτάσεις:

- Η απόσταση γης – ήλιου είναι μεγαλύτερη από το 18-πλάσιο και μικρότερη από το 20-πλάσιο της απόστασης γης – σελήνης.
- Οι διάμετροι του ηλίου και της σελήνης έχουν τον αυτό λόγο όπως οι αποστάσεις τους.
- Ο λόγος της διαμέτρου του ηλίου προς τη διάμετρο της γης είναι μεγαλύτερος από $\frac{19}{3}$ και μικρότερος από $\frac{43}{6}$.

Στην απόδειξη της τελευταίας πρότασης χρησιμοποιούνται οι παρατηρήσεις των εκλείψεων, ενώ η απόδειξη της πρώτης πρότασης είναι σημαντική για την ιστορία της τριγωνομετρίας επειδή δίνει για πρώτη φορά μια μέθοδο προσέγγισης του ημιτόνου μιας μικρής γωνίας (3 μοιρών).

Για τον Αρχιμήδη ως αστρονόμο, γνωρίζουμε δυστυχώς πολύ λίγα. Σύμφωνα με μια δήλωση του Ιπάρχου¹¹, ο Αρχιμήδης έκανε σφάλμα $\frac{1}{4}$ της ημέρας (πάρα πολύ μικρό) στην παρατήρηση των ηλιοστασίων. Στην πραγματεία του «Ψαμμίτης»¹², περιγράφει έναν μηχανισμό που χρησιμοποίησε για να μετρήσει τη φαινομένη διάμετρο του ηλίου. Ο Αρχιμήδης φαίνεται να ασπάζεται την άποψη των περισσότερων αστρονόμων η οποία

¹⁰ B.L. Van Der Waerden, 'Η απόπνιση της επιστήμης', Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000, σελίς 238.

¹¹ Κλαύδιος Πτολεμαίος, 'Μεγίστη Σύνταξις', III, 1.

¹² B.L. Van Der Waerden, 'Η απόπνιση της επιστήμης', Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000, σελίς 248.

υποστηρίζει ότι η γη βρίσκεται στο κέντρο του σύμπαντος. Σύμφωνα με τον Μακρόβιο, ο Αρχιμήδης υπολόγισε τον αριθμό των σταδίων από τη γη ως την σελήνη, από την σελήνη ως την Αφροδίτη, από εκεί ως τον Ερμή, ως τον Ήλιο, τον Άρη, τον Δία, τον Κρόνο και τέλος από εκεί ως την σφαίρα των απλανών.

Όμως το μεγαλύτερο επίτευγμα του Αρχιμήδη στο πεδίο της αστρονομίας, το οποίο θαυμάστηκε ιδιαίτερα στην αρχαιότητα, ήταν η κατασκευή ενός πλανηταρίου. Το πλανητάριο ήταν μια περιστρεφόμενη ανοιχτή σφαίρα με εσωτερικούς μηχανισμούς οι οποίοι μιμούνταν τις κινήσεις του ήλιου, της σελήνης και των πέντε πλανητών. Μια απλή στροφή έθετε σε λειτουργία όλες τις περίπλοκες κινήσεις με τις ποικίλες περιόδους περιστροφής των διαφόρων ουρανίων σωμάτων. Όπως γράφει ο Κικέρωνας¹³: *«Όταν ο Gallus έθεσε τη σφαίρα σε κίνηση μπορούσε να δει κανείς, σε κάθε στροφή, τη σελήνη να ανατέλλει μετά τον ήλιο επάνω από το γήινο ορίζοντα, όπως ακριβώς συμβαίνει κάθε μέρα στον ουρανό. Και μετά έβλεπε πώς ο ήλιος εξαφανιζόταν και πώς η σελήνη εισερχόταν στον κόνο της σκιάς της γης με τον ήλιο στην απέναντι πλευρά...»*.

¹³ B.L. Van Der Waerden, *‘Η αφύπνιση της επιστήμης’*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000, σελίς 248.

Διηγήσεις για τον Αρχιμήδη

Η αγάπη και η εμμονή του με τα μαθηματικά αλλά και οτιδήποτε τον απασχολούσε δηλώνεται από τον Πλούταρχο¹⁴:

«[...]συνεχώς μαγεμένος από μία Σειρήνα που τον συνόδευε πάντα, ξέχασε να φάει και να φροντίσει το σώμα του. Και όταν, όπως θα συνέβαινε συχνά, τον ωθούσαν να λούσει τον εαυτό του, αυτός θα εξακολουθούσε να ζωγραφίζει γεωμετρικά σχήματα στις στάχτες ή με το δάχτυλό του θα σχεδίαζε γραμμές πάνω στο αλειμμένο σώμα του, όντας κατεχόμενος από μια φοβερή έκσταση και πραγματικά ένας δούλος στις Μούσες[...]

Βγαίνοντας από το μπάνιο, άλειφε το σώμα του με λάδι κατά τη συνήθεια της εποχής, και συνεπαρμένος παρατηρούσε τα διαγράμματα που σχημάτιζε με το νύχι στο λαδωμένο του σώμα.

Λέγεται επίσης ότι είχε ως πίνακα ένα πάτωμα στρωμένο με άμμο ή ένα κομμάτι σκληρής γης σκονισμένο και δίχως ανωμαλίες. Καθισμένος δε μπροστά στη φωτιά διέγραφε σχήματα στη στάχτη.

Αρκετά γνωστή σε όλους είναι η ακόλουθη ιστορία την οποία διηγείται ο Βιτρούβιος στο έργο του «*De Architectura*» («Περί αρχιτεκτονικής»)¹⁵:

«[...]nimirum Hiero enim Syracusis auctus regia potestate, rebus bene gestis cum auream coronam votivam diis immortalibus in quodam fano constituisset ponendam, manupretio locative faciendam et aurum ad saconam adpendit redemptori. Is ad tempus opus manu factum subtiliter regi adprovabit et ad saconam pondus coronae visus est praestitisse. Posteaquam indicium est factum dempto auro tantundem argendi in id coronarium opus admixtum esse, indignatus Hiero se contemptum esse neque inveniens, qua ratione id furtum reprehenderet, rogavit Archimedes, uti in se sumeret sibi de eo cogitationem. Tunc is, cum haberet eius rei curam, casu venit in balineum, ibique cum in solium descenderet, animadvertit, quantum corporis sui in eo insideret, tantum aquae extra solium effluere. Idque cum eius rei rationem explicationis ostendisset, non est moratus, sed exsiluit gaudio motus de

¹⁴ E.J. Dijksterhuis, 'Archimedes', Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987.

¹⁵ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α.- Μαρτυρία 245.

*solio et nudus vadens domum <uni> versis significabat clara voce invenisse, quod quereret ;
nam currens identidem graece clamabat εύρηκα εύρηκα[...]*»

([...])Όταν ο βασιλιάς Ιέρωνας, αφότου πέτυχε να γίνει βασιλιάς των Συρακουσών, θέλησε για την επιτυχία του να αφιερώσει στους αθάνατους θεούς σε ένα ναό ένα χρυσό στεφάνι. Το παράγγειλε έναντι αμοιβής σε χρυσοχόο και όταν αυτό ετοιμάστηκε ζύγιζε όσο έπρεπε. Το έργο αυτό, που παραδόθηκε μέσα στη χρονική προθεσμία από τον τεχνίτη, δέχτηκε την πλήρη επιδοκιμασία του βασιλιά και επιπλέον είχε το προκαθορισμένο βάρος. Αργότερα διατυπώθηκε η κατηγορία ότι αφαιρέθηκε μέρος του χρυσού και στη θέση του τοποθετήθηκε στο στεφάνι το ανάλογο μέρος αργύρου. Ο Ιέρωνας αγανάκτησε διότι εξαπατήθηκε. Επειδή λοιπόν ήταν προβληματισμένος για το πώς θα αποδείκνυε την απάτη, έδωσε εντολή στον Αρχιμήδη να ερευνήσει την υπόθεση. Καθώς ο τελευταίος προσπαθούσε να εκπληρώσει την εντολή εισήλθε στο Βαλάνειο για να κάνει μπάνιο και όταν μπήκε μέσα στην μπανιέρα του ήρθε στο νου ότι όσο νερό χυνόταν έξω από την μπανιέρα τόσο ήταν το βάρος του βυθιζόμενου σώματος. Έπειτα από σκέψη για την αιτία αυτού του φαινομένου φώναξε «Εύρηκα! Εύρηκα!»).

Έτσι ο Αρχιμήδης διατύπωσε μια αρχή της υδροστατικής που είναι γνωστή ως η αρχή του Αρχιμήδη. Την αρχή αυτή την διατύπωσε στο έργο του: «*Επί των πλεόντων σωμάτων*». Η αρχική διατύπωση είναι η ακόλουθη: «*Ενα στερεό βαρύτερο από ένα υγρό, αν τεθεί εντός αυτού, θα βυθιστεί. Αν ισορροπήσει στο υγρό τότε θα είναι πιο ελαφρό από το πραγματικό του βάρος κατά βάρος ίσο τ' εκείνου του υγρού που εκτοπίζει*». Το φαινόμενο αυτό επαληθεύει το ότι ένα σώμα, που εισάγεται σε ένα υγρό, δέχεται μια ώθηση κατακόρυφη προς τα άνω (άνωση) ίση με το βάρος του υγρού που εκτοπίζει. Η αρχή του Αρχιμήδους διατυπώνεται ως εξής: «*Κάθε σώμα το οποίο βυθίζεται μέσα σε κάποιο υγρό υφίσταται άνωση, η οποία είναι ίση με το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού*».

Μία άλλη ιστορία, την οποία αναφέρει ο Ήρωνας¹⁶ στην πραγματεία του «*Αποσπάσματα Μηχανικής*», αφορά μια μηχανική ανακάλυψη του Αρχιμήδη (ανακάλυψη των μοχλών):

¹⁶ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α.- Μαρτυρία 43.

*«Της αὐτῆς δέ ἐστιν θεωρίας τὸ δοθέν βάρος τῇ δοθείσῃ δυνάμει κινῆσαι τοῦτο γάρ
Αρχιμήδους μὲν εὕρημα λέγεται μηχανικόν, ἐφ' ᾧ λέγεται εἰρηκέναι. Δός μοι, φησί, πού στω
καὶ κινῶ τὴν γῆν».*

(Αὐτὴ ἡ θεωρία ἰσχύει γιὰ νὰ κινήσῃ τὸ δοθέν βάρος με τὴν βοήθεια δοθείσας δυνάμεις. Διότι αὐτὸ λέγεται ὅτι εἶναι μηχανικὴ ανακάλυψη τοῦ Αρχιμήδη γιὰ τὴν ὁποία λέγεται ὅτι εἶπε: πού νὰ σταθῶ καὶ μπορῶ νὰ κινήσω τὴ γῆ).

Ἡ ἱστορία ἔχει ὡς ἐξῆς: ὁ Αρχιμήδης υποστήριζε ὅτι μποροῦσε νὰ κινήσῃ ἓνα δοθέν βάρος με μίαν δοθεῖσα δύναμη χωρὶς ἰδιαίτερη προσπάθεια. Ὄταν ὁ Ιέρωνας ἀκούσε αὐτὴν τὴ θεωρία, προσκάλεσε τὸν Αρχιμήδη γιὰ νὰ τοῦ δείξῃ πῶς αὐτὸ τὸ ὁποῖο υποστήριζε μποροῦσε νὰ συμβεῖ. Ὁ βασιλιάς τότε εἶχε παραγγεῖλῃ νὰ ναυπηγηθεῖ ἓνα πολυτελές πλοῖο, ἡ λεγόμενη «Συρακοσία», τὸ ὁποῖο θὰ δώριζε στὸν βασιλιά τῆς Αἰγύπτου Πτολεμαῖο. Τὸ πλοῖο αὐτὸ ἦταν τεράστιο, ἐξοπλισμένο με ὅλα τὰ θαύματα τῆς τεχνολογίας καὶ εἶχε τραβηχθεῖ στὴ στεριά με μεγάλη δυσκολία ὅπου ἐπανδρώθηκε με πλήρωμα. Ὁ Αρχιμήδης ἐφηύρε ἓνα μηχανήμα, τὸ λεγόμενο πολύσπαστο, τὸ ὁποῖο ἦταν δυνατόν νὰ χειριστεῖ ἀκόμη καὶ ἓνας ἄνθρωπος μόνος του, καὶ με πολὺ ἀπλές κινήσεις τοῦ χεριοῦ του, ἐσύρε το πλοῖο ἀπὸ τὴν στεριά στὴν θάλασσα τόσο ἀπαλά σαν νὰ κυλοῦσε πάνω σὲ νερό. Αὐτὴ ἡ ἱστορία ἐγίνε γνωστὴ σὲ ὅλους κυρίως ἐξαιτίας τῆς φράσης τοῦ Αρχιμήδη: «Δός μοι πού στω καὶ κινῶ τὴν γῆν».

Μία παραλλαγή αὐτῆς τῆς ἱστορίας μας δίνει ὁ Πλούταρχος¹⁷ στὸ ἔργο του «Βίοι Παράλληλοι»:

«[...]Πάντως ὁ Αρχιμήδης ἔγραψε στὸν Ιέρωνα, πού ἦταν συγγενὴς καὶ φίλος του, ὅτι ἀν δοθεῖ ἡ δύναμη μπορεῖ νὰ μετακινηθεῖ ὁποῖδήποτε δοθέν βάρος καὶ καυχώμενος, ὅπως λένε, γιὰ τὴ δύναμη τῆς ἀπόδειξης, εἶπε ὅτι ἀν διέθετε ἄλλῃ μιᾷ γῇ θὰ μποροῦσε νὰ μετακινούσε ἐτοῦτῃ πατώντας σὲ ἐκείνη. Κι ἐπειδὴ ὁ Ιέρων ἐμείνε κατάπληκτος καὶ τὸν παρακάλεσε νὰ ἀποδείξῃ τὸ πρόβλημα με πράξεις καὶ νὰ δείξῃ κάτι ἀπὸ τὰ μεγάλα πού κινεῖται με μικρὴ δύναμη, ὁ Αρχιμήδης πήρε μιὰ βασιλικὴ τρικάρταρη οἰκάδα πού τὴν εἶχαν σύρει ἐξω στὸν ναύσταθμο με πολὺ κόπο καὶ πολλοὺς ἐργάτες, κι ἀφοῦ ἔβαλε μέσα πολλοὺς ἀνθρώπους καὶ τὸ συνηθισμένο φορτίο, κάθισε μόνος του μακριὰ καὶ χωρὶς νὰ κοπιᾷ καθόλου, ἀλλὰ

¹⁷ Βίοι Παράλληλοι, Μάρκελλος', Πλούταρχος, ἐκδόσεις Ἀρχαία Ἑλληνικὴ γραμματεία, Τόμος Β', σελὶς 151.

ακίνητος και κουνώντας μόνο με το χέρι του την άκρη ενός πολύσπαστου μηχανήματος, έκανε το πλοίο να μετακινείται ομαλά και ατάραχα, σαν να γλιστρούσε πάνω στη θάλασσα. Ο βασιλιάς, λοιπόν, έμεινε έκπληκτος μ' αυτό, κατάλαβε τη δύναμη της τέχνης του και έπεισε τον Αρχιμήδη να του φτιάξει μηχανήματα για κάθε μορφή πολιορκίας».

Ο θάνατος του Αρχιμήδη

Τα περιστατικά του θανάτου του Αρχιμήδη περιγράφονται με διάφορες παραλλαγές από Αρχαίους ή Βυζαντινούς συγγραφείς¹⁸, όπως ο Δίων, ο Πλούταρχος, ο Τίτος ο Λίβιος, ο Σίλιος ο Ιταλικός, ο Βαλέριος ο Μάξιμος, ο Παχυμέρης και ο Τζέτζης¹⁹, σύμφωνα με τον οποίο:

«[...]Ούτος κατά Διόδωρον, της Συρακούσης ταύτης προδότου προς τον Μάρκελλον αθρόως γενομένης είτε κατά τον Δίωνα Ρωμαίους πορθηθείσης, Αρτέμιδιτων πολιτών τότε παννυχιζόντων, τοιουτοτρόπως τέθηκεν υπό τινος Ρωμαίου. Ην κεκυφώς, διάγραμμα μηχανικόν τι γράφων, τις δε Ρωμαίος επιστάς ειλκεν αιχμαλωτίζων. Ο δέ του διαγράμματος όλος υπάρχων τότε, τις ο καθέλκων ουκ ειδώς έλεγε προς εκείνον “ Απόστηθι, ω άνθρωπε, του διαγράμματος μου ”. Ως δ’ είλκε τουτον συστραφείς και γνούς Ρωμαίον είναι. Εβόα, τι μηχανήμα τις των εμων μοι δότω. Ο δε Ρωμαίος πτοηθείς ευθύς εκεινον κτείνει, άνδρα σαθρόν καί γέροντα, δαιμόνιον τοις έργοις[...]».

([...]Αυτός σύμφωνα με τον Διόδωρο όταν η πόλη των Συρακουσών κατελήφθη από τον Μάρκελλο με προδοσία ή, σύμφωνα με τον Δίωνα, κυριεύτηκε από τους Ρωμαίους ενώ οι πολίτες διασκεδάζαν λόγω της γιορτής της Αρτέμιδος, φονεύθηκε από κάποιον Ρωμαίο με τον εξής τρόπο. Βρισκόταν σκυμμένος μελετώντας κάποιο γεωμετρικό διάγραμμα, οπότε ήρθε κάποιος Ρωμαίος και τον έσυρε ως αιχμάλωτο. Ο δε Αρχιμήδης, ήταν τότε αφοσιωμένος στο διάγραμμα, και μη γνωρίζοντας ποιος τον τραβά του είπε: «Ω άνθρωπε, μην αγγίζεις το διάγραμμα μου». Ενώ δε τον τραβούσε γυρίζοντας κατάλαβε ότι είναι Ρωμαίος. Φώναξε, «κάποιος από τους δικούς μου ας μου δώσει κάποιο μηχανήμα». Ο δε Ρωμαίος επειδή φοβήθηκε αμέσως τον σκότωσε, άνδρα αδύνατο και γέροντα, δαιμόνιο στις πράξεις[...]).

Μια παραλλαγή αυτής της εκδοχής την οποία δίνει ο Πλούταρχος²⁰ στο έργο του «Βίοι παράλληλοι, Μάρκελλος», υποστηρίζει ότι ο Ρωμαίος αυτός στρατιώτης πήγε αμέσως να τον σκοτώσει με το ξίφος του, και ο Αρχιμήδης τον παρακάλεσε θερμά να περιμένει λίγη

¹⁸ ‘Οι Φυσικοί Επιστήμονες της Αρχαίας Ελλάδος’, εκδότης Β. Σπανδάγος, Μέρος II, σελίς 160.

¹⁹ ‘Αρχιμήδους Άπαντα’, εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 182.

²⁰ ‘Αρχιμήδους Άπαντα’, εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 118.

ώρα ώστε να μην αφήσει το πρόβλημα μισοτελειωμένο και άλυτο. Όμως ο στρατιώτης αδιαφόρησε στις παρακλήσεις του και τον σκότωσε:

*« [...] ἔτεροι μὲν οὖν λέγουσιν ἐπιστηναι μὲν εὐθύς ὡς ἀποκτενουντα ξιφήρη τὸν Ῥωμαῖον
ἐκεῖνον δ' ἰδόντα δεισθαι καὶ ἀντιβολειν ἀναμειναι βραχὺν χρόνον, ὡς μὴ καταλίπη το
ζητούμενον ἀτελές καὶ ἀθεώρητον, τὸν δὲ οὐ φροντίσαντα διαχρήσασθαι [...] »*

Σύμφωνα με μία τρίτη εκδοχή πάλι από το ίδιο έργο του Πλούταρχου, κάποιοι στρατιώτες οι οποίοι τον συνάντησαν στο δρόμο να πηγαίνει κάποια μαθηματικά όργανα στον Μάρκελλο, ηλιακά ρολόγια, σφαίρες και γωνίες, με τα οποία μπορούσε κανείς να κατανοήσει το μέγεθος του ήλιου, τον σκότωσαν γιατί νόμισαν ότι στη θήκη είχε χρυσάφι.

*« [...] καὶ τρίτος ἐστὶ λόγος, ὡς κομίζοντι πρὸς Μάρκελλον αὐτῶ των μαθηματικῶν
ὀργανῶν σκιάθηρα καὶ σφαίρας καὶ γωνίας, αἷς ἐναρμόττει τό του ἡλίου μέγεθος πρὸς τὴν
ὄψιν, στρατιῶται περιτυχόντες καὶ χρυσίον ἐν τῷ τεύχει δόξαντες φέρειν ἀπέκτειναν [...] »*

Παρά τις διαφορές των τριών αυτών εκδοχών του θανάτου του Αρχιμήδη, υπάρχει ένα κοινό σημείο που τις ενώνει και το περιγράφει ο Ιωάννης Τζέτζης²¹:

*« Ἐθρήνησε δὲ Μάρκελλος τοῦτο μαθὼν εὐθέως, λαμπρῶς τε τοῦτον ἐκρύψεν ἐν τάφοις τοῖς
πατρῴοις σὺν τοῖς ἀρίστοις πολιτῶν καὶ τοῖς Ῥωμαίοις πασι. Τὸν δὲ φονέα τοῦ ἀνδρὸς οἰμαι
πελέκει κτείνει. »*

(Λυπήθηκε λοιπόν ο Μάρκελλος μόλις το έμαθε, και τον έθαψε με λαμπρότητα στον πατρικό τάφο μεταξύ των αρίστων συμπολιτών του και όλων των Ρωμαίων. Λέγεται μάλιστα ότι σκότωσε τον φονιά με πέλεκυ)

²¹ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α - Μαρτυρία 182.



Ο τάφος του Αρχιμήδη όπως απεικονίζεται στο Λεξικό του Α. Ρ. Ραγκαβή.²² Ο Ε. Σταμάτης αναφέρει ότι ο τάφος του Αρχιμήδη ανακαλύφθηκε από τον Κικέρωνα το 75 π.Χ. Με την πάροδο των χρόνων ο τάφος ξεχάστηκε και καλύφθηκε από χώματα. Ανακαλύφθηκε δε εκ νέου το 1966 μετά από ανασκαφές της Ιταλικής Αρχαιολογικής Υπηρεσίας.

Το θλιβερό αυτό επεισόδιο που συμβολίζει την αιώνια σύγκρουση του κόσμου της βίας με τον κόσμο του πνεύματος ενέπνευσε πολλούς ποιητές και λογοτέχνες²³. Ο τραγικός θάνατος του Αρχιμήδη αναπαριστάται σε ένα περίφημο ψηφιδωτό. Στη δημοπρασία της προσωπικής περιουσίας του Jerome Bonaparte²⁴, ειπώθηκε ότι το ψηφιδωτό αυτό προέρχεται από την Ηράκλεια. Όμως ο F.W. Goethert στην διατριβή του (*Zur Kunst der romischen Republic*, Βερολίνο, 1931) θεωρεί πολύ πιθανό, από την εξέταση του θώρακα και του μανδύα του στρατιώτη, από την στάση του Αρχιμήδη, και από τις πτυχές στο ρούχο του ότι το ψηφιδωτό δεν είναι αρχαίο αλλά προέρχεται από τη σχολή του Ραφαήλ.

²² Χρήστος Δ. Λάζος, «*Αρχιμήδης ο ευφυής μηχανικός*», Εκδ. Αίολος, σελίς 24.

²³ «Οι Φυσικοί Επιστήμονες της Αρχαίας Ελλάδος», εκδότης Β. Σπανδάγος, Μέρος II, σελίς 169.

²⁴ B.L. Van Der Waerden, «*Η αφύπνιση της επιστήμης*», Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000, σελίς 247.



Ρωμαϊκό ψηφιδωτό του 1^{ου} μ.Χ. αιώνα, όπου απεικονίζεται η σκηνή του φόνου του Αρχιμήδη από ένα Ρωμαίο στρατιώτη.

Κεφάλαιο 1^ο

Περί των έργων του Αρχιμήδη

1.1 Η γλώσσα των έργων του Αρχιμήδη

Σύμφωνα με τον ιστοριοδίφη Ιωάννη Τζέτζη²⁵, ο Αρχιμήδης είχε γράψει τις πραγματείες του στη σικελική δωρική διάλεκτο:

«[...]Καί τίνα ἀ ανέγνωκα, ἡ ὄναρ ταυτα ειδον; Εδόκουν καί τόν Δώριον ἔχειν δέ χαρακτηρα, καί ἅπαν δέ τό γνώρισμα σαφές του Αρχιμήδους».

([...]Και ποιανού είναι τα βιβλία τα οποία διάβασα ή μήπως τα είδα όνειρο; Φαίνεται ότι ήταν γραμμένα στη δωρική διάλεκτο και το ύφος τους ήταν σαφώς του Αρχιμήδη).

Όμως οι πραγματείες του: «Περί σφαίρας και κυλίνδρου» το α' και β' βιβλίο, «Κύκλου μέτρησις», «Βοεικόν πρόβλημα», «Στομάχιον» και «Έφοδος» σώζονται στην κοινή αττική γλώσσα. Θεωρείται πιθανό ότι η μετατροπή της γλώσσας αυτών των έργων έγινε στην Κωνσταντινούπολη²⁶ από τον μηχανικό Ισίδωρο τον Μιλήσιο, τον ένα από τους δύο αρχιτέκτονες του ναού της Αγίας Σοφίας.

Όσο αφορά στα συγγράμματα του Αρχιμήδη, τα οποία έχουν σωθεί στην σικελική δωρική διάλεκτο, έχουν υποστεί μικρές γλωσσικές μεταβολές οι οποίες οφείλονται στους αντιγραφείς. Ύστερα από προσεκτική παρατήρηση των διασωθέντων έργων²⁷ του Αρχιμήδη, στο θεώρημα 15 της πραγματείας «Περί κωνοειδών και σφαιροειδών» αλλά και στην εισαγωγή του έργου «Περί ελίκων» παρατηρήθηκε η μεταβολή της λέξης από

²⁵ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α - Μαρτυρία 188.

²⁶ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α

²⁷ Από τα έργα του Αρχιμήδη σώζονται τα παρακάτω (με τη σειρά με την οποία εμφανίζονται στην δεύτερη έκδοση του Heiberg).

· 'Περί σφαίρας και κυλίνδρου' α' και β' βιβλίο.

· 'Κύκλου μέτρησις'.

· 'Περί κωνοειδών και σφαιροειδών'.

· 'Περί ελίκων'.

· 'Μηχανικά ή Επίπεδων Ισορροπιών ή Κέντρα Βαρών' α' βιβλίο.

· 'Μηχανικά ή Επίπεδων Ισορροπιών ή Κέντρα Βαρών' β' βιβλίο.

· 'Ψαμμίτης'.

· 'Ο τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής'.

· 'Περί οχουμένων α' και β' βιβλίο'.

· 'Στομάχιον'.

· 'Έφοδος'.

«σαμειον» όπως είναι στην δωρική διάλεκτο σε «σημειον». Στο τέλος του θεωρήματος 28 της πραγματείας «Περί κωνοειδέων και σφαιροειδέων» σημειώθηκε η μεταβολή της λέξης από «αμιόλιος» σε «ημιόλιος» και την ίδια ακριβώς αλλαγή παρατηρούμε και στο τέλος του θεωρήματος 8 της πραγματείας «Μηχανικά ή Επίπεδων Ισορροπιών ή Κέντρα Βαρών».

Άλλες μεταβολές στα έργα του Αρχιμήδη έχουν γίνει κατά καιρούς εξαιτίας του μεγάλου αριθμού των αντιγραφέων που μεσολάβησαν από την αντιγραφή του πρωτότυπου χειρόγραφου έργου μέχρι και την αντιγραφή των χειρογράφων αυτών που έχουμε στα χέρια μας σήμερα.

1.2 Τα σωζόμενα έργα του Αρχιμήδη

1. *Περί σφαίρας και κυλίνδρου α' και β' βιβλίο.*
2. *Κύκλου μέτρησις.*
3. *Περί κωνοειδέων και σφαιροειδέων.*
4. *Περί ελίκων.*
5. *Μηχανικά ή Επίπεδων Ισορροπιών ή Κέντρα Βαρών Επιπέδων α' και β' βιβλίο.*
6. *Στομάχιον (Stomachion).*
7. *Περί οχουμένων α' και β' βιβλίο.*
8. *Τετραγωνισμός ορθογώνιου κώνου τομής.*
9. *Ψαμμίτης.*
10. *Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος.*
11. *Βιβλίο λημμάτων (μόνο στα Αραβικά).*
12. *Βοεικόν πρόβλημα.*
13. *Αρχαί γεωμετρίας (στα Αραβικά).*
14. *Περί κύκλων εφαπτόμενων αλλήλων (στα Αραβικά).*
15. *Ωρολόγιον υδραυλικόν (στα Αραβικά).*
16. *Εγγραφή κανονικού επταγώνου (στα Αραβικά).*

1.3 Τα χαμένα έργα του Αρχιμήδη

17. *Περί 13 ημικανονικών πολυέδρων.*
18. *Αριθμητικά ή Αρχαί.*
19. *Μηχανικά ή Στοιχεία μηχανικών.*
20. *Κατοπτρικά.*
21. *Το υδραυλικό ρολόι.*
22. *Περί τριγώνων.*
23. *Περί τετραπλεύρων.*
24. *Κεντροβαρικά.*
25. *Περί ζυγών*
26. *Πλινθίδες και κύλινδροι.*
27. *Ισοπεριμετρικά.*
28. *Ισορροπίαι.*
29. *Περί σφαιροποιίας.*
30. *Στατική ή Στοιχεία επί των στηρίξεων.*
30. *Επισίδια βιβλία.*
31. *Βαρουλκός, Υδροσκοπίαι, Πνευματική .*
32. *Περί παραλλήλων γραμμών.*
33. *Προοπτική.*
34. *Περί κοίλων παραβολικών καυστικών κατόπτρων.*
35. *Περί βαρύτητας και ελαφρότητος.*
36. *Περί ημερολογίου.*
37. *Κάυσις δια των κατόπτρων.*
38. *Περί του μεγέθους του ενιαυτού.*
39. *Περί του υπολογισμού της επιφανείας και του όγκου ακανονίστων σωμάτων.*
40. *Περί κύκλων εφαπτομένων αλλήλων.*
41. *Περί κύκλου.*

1.4 Κείμενα που αναφέρονται στη συλλογή Fihrist

42. *Περί αρχιτεκτονικής.*
43. *Περί δρομομέτρων.*
44. *Περί της διαμέτρου.*
45. *Συγγράμματα εν επιτομή.*
46. *Στοιχεία των Μαθηματικών.*
47. *Βιβλίο δεδομένων ή ορισμών.*
48. *Περί ιδιοτήτων των ορθογωνίων τριγώνων.*
49. *Περί επτάγωνου εγγεγραμμένου σε κύκλο.*
50. *Περί ασυμπτώτων για τα στοιχεία της Γεωμετρίας.*

1.5 Πίνακας χαμένων έργων

ΧΑΜΕΝΑ ΕΡΓΑ	ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ
Περί 13 ημικανονικών Πολυέδρων	Αναφέρονται από τον Πάππο ²⁸ και απ' τον Ήρωνα.
Αριθμητικά ή Οι αρχές	Ο ίδιος ο Αρχιμήδης αναφέρεται στο έργο του αυτό στον «Ψαμμίτη» όπου και παραθέτει και τα περιεχόμενα του. Είναι αφιερωμένο στον Ζεύξιππο. Ο Hultsch ²⁹ το αναφέρει αποκαλώντας το «Κατονόμαζις των αριθμών».
Μηχανικά ή Στοιχεία Μηχανικών	Ο ίδιος ο Αρχιμήδης ³⁰ αναφέρεται στο έργο του αυτό το οποίο αφορά στην εύρεση του κέντρου βάρους των στερεών. Το πρώτο βιβλίο του έργου του «Περί ισορροπίας των επιπέδων» είναι πιθανόν ένα απόσπασμα αυτού.
Κατοπτρικά	Ο Θέων ο Αλεξανδρεύς, πατέρας της Υπατίας στα Σχόλια του στην «Μεγίστη Σύνταξη» αποδίδει το έργο αυτό στον Αρχιμήδη κάτι που επιβεβαιώνεται και από τον Απουληίο ³¹ ο οποίος απαριθμεί αρκετά αντικείμενα οπτικής τα οποία λέγεται ότι χειρίστηκε ο Αρχιμήδης στην κατασκευή πλανητοσκοπίου του. Αναφέρεται από τον Τζέτζη ³² και τα «Σχόλια στα Κατοπτρικά» ³³ του Ευκλείδη περιλαμβάνουν μια ιδιόχειρη απόδειξη του Αρχιμήδη όσο αφορά στην ισότητα της γωνίας πρόσπτωσης και της γωνίας ανάκλασης.
Το υδραυλικό ρολόι	Την κατασκευή αυτή την αναφέρει ο Tertullian ³⁴ .

²⁸ Sir Thomas Heath, 'A History of Greek Mathematics', Volume II, From Aristarchus to Diophantus, Dover Publications.

²⁹ E.J. Dijksterhuis, 'Archimedes', Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987.

³⁰ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α.

³¹ Ο Απουληίος από την Madaura ήταν ένας Αφρικανός συγγραφέας.

³² 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α - Μαρτυρία 188.

³³ Sir Thomas Heath, 'A History of Greek Mathematics', Volume II, From Aristarchus to Diophantus, Dover Publications.

³⁴ Sir Thomas Heath, 'A History of Greek Mathematics', Volume II, From Aristarchus to Diophantus, Dover Publications.

	στο βιβλίο του « <i>De Anima</i> » και αρκετοί Άραβες συγγραφείς, ένας εκ των οποίων δίνει και μια λεπτομερειακή περιγραφή του.
Περί τριγώνων	Ο ίδιος ο Αρχιμήδης ³⁵ επικαλείται το έργο του αυτό στο έκτο θεώρημα του συγγράμματος του « <i>Βιβλίο Λημμάτων</i> ».
Περί τετραπλεύρων	Ο ίδιος ο Αρχιμήδης ³⁶ επικαλείται το έργο του αυτό στο δωδέκατο θεώρημα του συγγράμματος του « <i>Βιβλίο Λημμάτων</i> ».
Κεντροβαρικά	Αναφέρεται από τον Πάππο ³⁷ , τον Σιμπλίκιο ³⁸ , τον Τζέτζη. ³⁹ Ασχολείται με το κέντρο βάρους στερεών που πιθανόν δεν προέρχονται από τις κωνικές τομές.
Περί ζυγών	Αναφέρεται από τον Πάππο ⁴⁰ και αφορά στην μεταφορά ενέργειας μέσω οδοντωτών τροχών.
Πλινθίδες και κύλινδροι	Αναφέρεται από τον Ήρωνα ⁴¹ .
Ισοπεριμετρικά	Αναφέρεται από τον Σιμπλίκιο ⁴² .
Ισορροπίαι	Ο ίδιος ο Αρχιμήδης ⁴³ αναφέρεται στο έργο αυτό το οποίο αφορά στην εύρεση του κέντρου βάρους των στερεών που προέρχονται από περιστροφή των κωνικών τομών.
Περί σφαιροποιίας	Το έργο αυτό αναφέρει ο Πρόκλος ⁴⁴ , ο Πάππος ⁴⁵ και ο Κάρπος ⁴⁶ κι σ' αυτό ο Αρχιμήδης ασχολείται με την κατασκευή του πλανηταρίου του.
Στατική ή Στοιχεία επί των στηρίξεων	Το έργο αυτό το αναφέρει ο Ήρωνα ⁴⁷ στα

³⁵ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α, σελίς 30.

³⁶ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α, σελίς 30.

³⁷ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 111.

³⁸ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 164.

³⁹ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 188.

⁴⁰ Sir Thomas Heath, '*A History of Greek Mathematics*', Volume II, From Aristarchus to Diophantus, Dover Publications.

⁴¹ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 46.

⁴² 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 163.

⁴³ Sir Thomas Heath, '*A History of Greek Mathematics*', Volume II, From Aristarchus to Diophantus, Dover Publications.

⁴⁴ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 121.

⁴⁵ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 110.

⁴⁶ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 110.

⁴⁷ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 41.

	«Μηχανικά» του τα οποία σώζονται στα Αραβικά.
Επισίδια βιβλία	Είναι ένα έργο αγνώστου περιεχομένου το οποίο αναφέρεται από τον Τζέτζη ⁴⁸ . Είναι πιθανό να πρόκειται για βιβλίο Στατικής.
Έλξη βαρών, Υδροστατική, Αεροστατιστική	Αναφέρεται από τον Πάππο ⁴⁹ και από τον Τζέτζη ⁵⁰ .
Περί αρχιτεκτονικής	Αναφέρεται από τον Βιτρούβιο ⁵¹ αλλά και από τον ίδιο τον Αρχιμήδη στο έργο του «Τετραγωνισμός παραβολής».
Περί δρομομέτρων	Το έργο αυτό αναφέρεται από τον Τζέτζη ⁵² .
Περί της διαμέτρου. Συγγράμματα εν επιτομή. Στοιχεία των Μαθηματικών.	Αναφέρονται από Άραβες συγγραφείς. ⁵³
Περί κύκλων εφαπτομένων αλλήλων Βιβλίο δεδομένων ή ορισμών. Περί παραλλήλων γραμμών. Περί ιδιοτήτων των ορθογωνίων τριγώνων. Περί επτάγωνου εγγεγραμμένου σε κύκλο. Περί ασύμπτωτων για τα στοιχεία της Γεωμετρίας.	Αναφέρονται από τον Άραβα μαθηματικό Thabit ibn Qurra.

⁴⁸ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 188.

⁴⁹ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 110.

⁵⁰ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 182 και 188.

⁵¹ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 245.

⁵² 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 188.

⁵³ E.J. Dijksterhuis, 'Archimedes', Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987.

1.6 Πίνακας για τους κώδικες

ΚΩΔΙΚΑΣ Α (αρχέτυπος – χαμένος)	
Τον 9 ^ο αιώνα ο Λέων της Θεσσαλονίκης ⁵⁴ με το παρώνυμο ιατροσοφιστής ή φιλόσοφος εξέδωσε στην Κωνσταντινούπολη, σε ένα τόμο, αρκετά έργα του Αρχιμήδη.	
12 ^ο αιώνα → Μεταφέρθηκε στην Ιταλία και βρέθηκε στην κατοχή της Νορμανδικής Αυλής του Παλέρμου στην Σικελία. Έπειτα πέρασε στην κατοχή του γερμανικού Οίκου των Hohenstaufen ⁵⁵ .	
1266 → Μαζί με ολόκληρη τη βιβλιοθήκη του Manfred ⁵⁶ δόθηκε στην βιβλιοθήκη του πάπα της Ιταλίας.	
1368 → Πέρασε σε ιδιωτικά χέρια.	
1423 → Βρέθηκε στα χέρια του έμπορου ελληνικών χειρογράφων Rinucci ⁵⁷ .	
1491 → Έγινε ιδιοκτησία του Ιταλού καθηγητή, συγγραφέα και ανθρωπιστή Giorgio Valla ⁵⁸ .	
1501 → Αγοράστηκε από τον πρίγκιπα του Capri, Albertus Pius ⁵⁹ για 800 χρυσά νομίσματα της εποχής εκείνης.	
1530 → Κληρονομήθηκε από τον ανιψιό του Albertus, τον Rodolfus Pius στην βιβλιοθήκη του οποίου βρισκόταν μέχρι το 1544.	
1550 → Ιδιοκτήτης του χειρογράφου έγινε ο Niccolo Ridolfi ⁶⁰ .	
1564 → Σε αυτό το διάστημα ⁶¹ χάθηκε ή πέρασε σε άλλα χέρια χωρίς να αφήσει ίχνη.	



⁵⁴ E.J. Dijksterhuis, 'Archimedes', Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987.

⁵⁵ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α

⁵⁶ Sir Thomas Heath, 'A History of Greek Mathematics', Volume II, From Aristarchus to Diophantus, Dover Publications.

⁵⁷ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α

⁵⁸ Sir Thomas Heath, 'A History of Greek Mathematics', Volume II, From Aristarchus to Diophantus, Dover Publications.

⁵⁹ Γιάννης Χριστιανίδης, 'Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών', Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2003, σελίς 147.

⁶⁰ Γιάννης Χριστιανίδης, 'Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών', Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2003, σελίς 147.

⁶¹ Sir Thomas Heath, 'A History of Greek Mathematics', Volume II, From Aristarchus to Diophantus, Dover Publications.



ΚΩΔΙΚΑΣ Β	ΚΩΔΙΚΑΣ C	ΚΩΔΙΚΑΣ D Laurentianus 28
(Λατινικά)	(Λατινικά)	(Λατινικά)
Συλλογή έργων με θέμα την οπτική και την μηχανική.	Τοποθετείται στον 19 ^ο αιώνα ⁶² .	Χρονολογείται την εποχή που ο Giorgio Valla είχε υπό την κατοχή του τον αρχέτυπο κώδικα A.
Χρησιμοποιήθηκε τον 13 ^ο αιώνα για την προετοιμασία της πρώτης μετάφρασης των έργων του Αρχιμήδη στα Λατινικά. Το 1508 ήταν στην ιδιοκτησία του ιερέα Andreas Conerus.	Η ανακάλυψή του αποτέλεσε σπουδαία συμβολή στην γνωστοποίηση των έργων του Αρχιμήδη.	Δημιουργήθηκε το 1491 έπειτα από εντολή του διάσημου ανθρωπιστή Florentine Angelo Poliziano για τη βιβλιοθήκη της οικογένειας των Μεδίκων.



ΚΩΔΙΚΑΣ Ε	ΚΩΔΙΚΑΣ G	ΚΩΔΙΚΑΣ Η
(Λατινικά)	(Λατινικά)	(Λατινικά)
Marcianus 305	Parisiensis 2360	Parisiensis 2361
Δημιουργήθηκε από τον Καρδηνάλιο Βησσαρίωνα στο διάστημα μεταξύ του	Δημιουργήθηκε ⁶⁴ την εποχή που ο αρχέτυπος κώδικας A ήταν στην κατοχή της οικογένειας	Γράφτηκε το 1544 από τον Christoph Auer ⁶⁵ έπειτα από εντολή του επισκόπου Georges d' Armagnac

⁶² E.J. Dijksterhuis, 'Archimedes', Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987.

1449 και 1468 ⁶³ .	του Πίου.	για τη Βιβλιοθήκη Royal.
-------------------------------	-----------	--------------------------

Η ύπαρξη των κωδίκων σήμερα οφείλεται στους λόγιους της Κωνσταντινούπολης που πρώτοι συνειδητά συλλέξανε τα διασκορπισμένα έργα του Αρχιμήδη. Ένας από αυτούς είναι ο Λέων ο Φιλόσοφος ο οποίος γύρω στο 790-869 μ.Χ. συγκέντρωσε όσα έργα κατάφερε να βρει και διαμόρφωσε με αυτά έναν χειρόγραφο κώδικα, τον οποίο αργότερα ο Heiberg ονόμασε «κώδικα Α».

⁶⁴ E.J. Dijksterhuis, 'Archimedes', Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987.

⁶⁵ E.J. Dijksterhuis, 'Archimedes', Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987.

⁶³ E.J. Dijksterhuis, 'Archimedes', Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987.

1.7 Πίνακας έργων που περιέχονται στους κώδικες

ΕΡΓΑ	ΚΩΔΙΚΑΣ Α	ΚΩΔΙΚΑΣ Β
<i>Περί σφαίρας και κυλίνδρου</i>	X	X
<i>Κύκλου μέτρησις</i>	X	X
<i>Περί κωνοειδών και Σφαιροειδών</i>	X	X
<i>Περί ελίκων</i>	X	X
<i>Μηχανικά</i>	X	X
<i>Ψαμμίτης</i>	X	
<i>Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου Τομής</i>	X	X
<i>Περί οχουμένων</i>		X

ΕΡΓΑ	ΚΩΔΙΚΑΣ Α	ΚΩΔΙΚΑΣ Β	ΚΩΔΙΚΑΣ C
<i>Τα σχόλια του Ευτόκιου</i>	X	X	
<i>Τα Μετρικά του Ήρωνα</i>	X		
<i>Έργο του Alhazen «Περί Πυρρείων»</i>		X	
<i>Η διατριβή De Ponderibus</i>		X	
<i>Δύο διατριβές του Πτολεμαίου</i>		X	

1.8 Οι εκδόσεις έργων του Αρχιμήδη

Δεν είναι γνωστό αν στην αρχαιότητα τα έργα του Αρχιμήδη είχαν εκδοθεί σε ένα σώμα, όπως συνέβη με τα έργα του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη. Θεωρείται όμως βέβαιο ότι θα υπήρχαν στη βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας, της Περγάμου και της Ρόδου. Όσον αφορά στις εκδόσεις των έργων του Αρχιμήδη αυτές, κατά χρονολογική σειρά, είναι οι παρακάτω:

- 550 μ.Χ. → Δημοσιεύτηκαν από τον Ισίδωρο τον Μιλήσιο, αρχιτέκτονα του ναού της Αγίας Σοφίας, για πρώτη φορά στην Κωνσταντινούπολη 800 χρόνια μετά το θάνατο του Αρχιμήδη οι πραγματείες του «*Περί σφαίρας και κυλίνδρου*» το α' και β' βιβλίο, «*Κύκλου Μέτρησις*» και «*Επιπέδων Ισορροπιών*» το α' και β' βιβλίο. Ο Ευτόκιος αναφέρει την έκδοση αυτή στο τέλος σε κάθε ένα από τα «*Σχόλια*» του.
- 9^ο αιώνα → Ο φιλόσοφος και μαθηματικός Λέων⁶⁶ εξέδωσε στην Κωνσταντινούπολη αρκετά έργα του Αρχιμήδη σε ένα τόμο.
- 1215 – 1286 → Ο Wilhelm von Morbecke δημοσίευσε τα έργα του Αρχιμήδη. Το έργο του βρίσκεται στην Παπική βιβλιοθήκη του Viterbo στην κεντρική Ιταλία και είναι γνωστό ως «*codex Ottovonianus 1850*».
- 1503 → Δημοσιεύτηκε στην Βενετία από τον Νεαπολίτανο μαθηματικό Luca Gaurico ένα βιβλίο για τον τετραγωνισμό του κύκλου το οποίο περιέχει την λατινική μετάφραση του έργου «*Κύκλου Μέτρησις*» και την λατινική μετάφραση του έργου «*Ο τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής*», το οποίο πάρθηκε από τον κώδικα B πριν από τις διορθώσεις του Conerus.
- 1543 → Δημοσιεύτηκε στην Βενετία ένα αντίγραφο επαυξημένο με το λατινικό κείμενο «*Μηχανικά*» ως μια κατά γράμμα αντιγραφή της έκδοσης του 1503 και επίσης το βιβλίο α' του έργου «*Περί οχουμένων*» από τον Niccolo Tartaglia.

⁶⁶ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α, σελίς 23
Νεγρεπόντης Σ. – Γιωτόπουλος Σ. – Γιαννακούλιας Ε., 'Απειροστικός Λογισμός', Τόμος Ι, Εκδόσεις Συμμετρία, σελίς 202.

- 1544 → Πραγματοποιήθηκε από τον Thomas Gechauff (Venatorius)⁶⁷ στον οίκο Ioannes Hervagius της Βασιλείας (Ελβετία) η editio princeps, η οποία είναι η πρώτη δια τύπου έκδοση των συγγραμμάτων του Αρχιμήδη. Η εκδοχή περιελάμβανε το ελληνικό κείμενο όλων των γνωστών τότε έργων, τη βελτιωμένη λατινική μετάφραση και τα «Σχόλια» του Ευτοκίου.

- 1558 → Δημοσιεύτηκε στην Βενετία από τον Federigo Commandino⁶⁸ μία λατινική μετάφραση η οποία περιέχει τα έργα «Κύκλου μέτρησις», «Περί ελίκων», «Ο τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής», «Περί σφαιροειδών και κωνοειδών» και «Ψαμμίτης». Ο εκδότης δεν γνώριζε την έκδοση του Niccolo Tartaglia και χρησιμοποίησε τον κώδικα B ή κάποιο αντίγραφο του.

- 1565 → Ο Federigo Commandino συμπλήρωσε την έκδοσή του με την μετάφραση του έργου «Περί οχουμένων».

- 1565 → Δημοσιεύτηκε στην Βενετία από τον Curtius Tiroianus με την βοήθεια του Tartaglia ολόκληρο το έργο του Αρχιμήδη «Περί οχουμένων».

- 1615 → Ο David Rivault⁶⁹ δημοσίευσε στο Παρίσι μία έκδοση η οποία περιελάμβανε τις αποδείξεις στα ελληνικά και στα λατινικά.

- 1659 → Δημοσιεύτηκαν στην Αγγλία⁷⁰ οι λατινικές μεταφράσεις ενός έργου του Άραβα μαθηματικού Thabit ibn Qurra το οποίο περιείχε μεταξύ άλλων την αραβική απόδοση του βιβλίου των «Λημμάτων» του Αρχιμήδη.

- 1675 → Δημοσιεύτηκε στο Λονδίνο από τον Isaac Barrow μία νέα λατινική έκδοση.

- 1676 → Ο John Wallis⁷¹, διάσημος Άγγλος μαθηματικός, δημοσίευσε στην Οξφόρδη τα έργα του Αρχιμήδη «Ψαμμίτης» και «Κύκλου μέτρησις» συνοδευμένα από τα «Σχόλια» του Ευτόκιου.

⁶⁷ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α, σελίς 25.

⁶⁸ E.J. Dijksterhuis, 'Archimedes', Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987.

⁶⁹ E.J. Dijksterhuis, 'Archimedes', Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987.

⁷⁰ Γιάννης Χριστιανίδης, 'Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών', Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2003.

⁷¹ E.J. Dijksterhuis, 'Archimedes', Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987.

- 1773 → Δημοσιεύτηκε από τον G.E. Lessing⁷² ένα επίγραμμα το οποίο αποδίδεται στον Αρχιμήδη και περιέχει και το «*Βοεικό πρόβλημα*». Σύμφωνα με την πληροφορία που μας δίνει ο Γιάννης Χριστιανίδης⁷³, ο Lessing ανακάλυψε το επίγραμμα αυτό στη βιβλιοθήκη όπου εργαζόταν ως βιβλιοθηκάριος στην κωμόπολη Wolferbuttel.
- 1798 → Δημοσιεύτηκε μία μετάφραση στα γερμανικά από τον K.F. Hauber⁷⁴ των έργων του Αρχιμήδη «*Περί σφαίρας και κυλίνδρου*» και «*Κύκλου μέτρησις*».
- 18^ο αιώνα → Δημοσιεύτηκε η λατινική μετάφραση του έργου του Αρχιμήδη «*Κύκλου μέτρησις*» την οποία είχε κάνει ο Ιταλός μαθηματικός Joseph Torelli από τον Abram Robertson, ύστερα από τον θάνατο του πρώτου. Μάλιστα, αυτή περιείχε και το ελληνικό κείμενο.
- 1807 → Δημοσιεύτηκε στο Παρίσι από τον F. Peyrard⁷⁵ μια μετάφραση στα γαλλικά όλων των έργων του Αρχιμήδη.
- 1817 → Δημοσιεύτηκε από τον J.J.I. Hoffmann μία μετάφραση στα γερμανικά του έργου «*Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής*».
- 1824 → Δημοσιεύτηκε μια ολοκληρωμένη μετάφραση στο ίδιο έργο συνοδευόμενη από την κριτική του Ernst Nizze.
- 19^ο αιώνα → Σύμφωνα με τον Γιάννη Χριστιανίδη⁷⁶, ο Δανός ερευνητής της ιστορίας της αρχαίας ελληνικής επιστήμης Johann Ludwig Heiberg, επιμελήθηκε την αρτιότερη ως τότε κριτική έκδοση των «*Απάντων*» του Αρχιμήδη. Η έκδοση αυτή αποτελείται από τρεις τόμους και έλαβε χώρα κατά τα έτη 1880-1881. Δημοσιεύθηκε στη σειρά της Βιβλιοθήκης των αρχαίων Ελλήνων συγγραφέων του Οίκου Teubner της Λειψίας.

⁷² Γιάννης Χριστιανίδης, 'Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών', Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2003.

⁷³ Γιάννης Χριστιανίδης, 'Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών', Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2003, σελίς 148.

⁷⁴ E.J. Dijksterhuis, 'Archimedes', Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987.

⁷⁵ E.J. Dijksterhuis, 'Archimedes', Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987.

⁷⁶ Γιάννης Χριστιανίδης, 'Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών', Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2003, σελίς 148.

- 1946 → Δημοσιεύτηκαν στην Αθήνα οι πραγματείες του Αρχιμήδη: «*Ο τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής*» και «*Μηχανικά ή Επίπεδων Ισορροπιών ή Κέντρα Βάρων*».
- 1950 → Δημοσιεύτηκε στην Αθήνα η πραγματεία του Αρχιμήδη «*Κύκλου μέτρησις*».
- 1965 → Δημοσιεύτηκε στην Αθήνα από τον Ευάγγελο Σ. Σταμάτη για πρώτη φορά το έργο «*Βιβλίο λημμάτων*» ως ανασκευή του αρχαίου κειμένου στην σικελική δωρική διάλεκτο συνοδευόμενο από μετάφραση στην νέα ελληνική.

Κεφάλαιο 2^ο

Οι μηχανικές ανακαλύψεις του Αρχιμήδη

2.1 Εισαγωγή

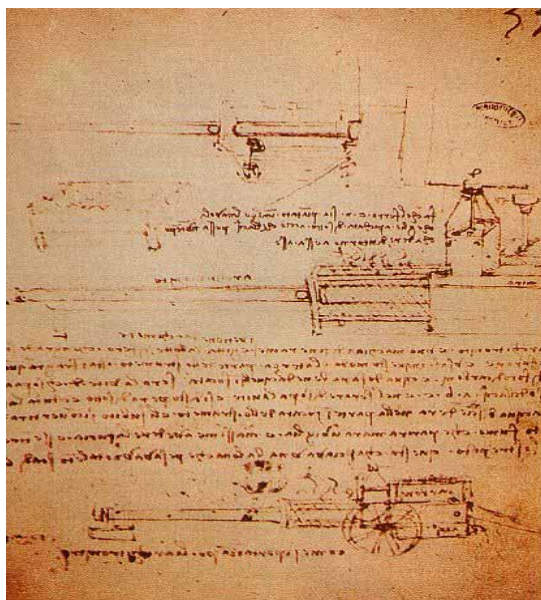
Το έργο του Αρχιμήδη υπήρξε τεράστιο, τόσο ποιοτικά όσο και ποσοτικά. Εργάστηκε πάνω στα Μαθηματικά και την Γεωμετρία και τα εφάρμοσε στον δρόμο του προς την εξερεύνηση της Μηχανικής και της Αστρονομίας. Η ερευνητική ματιά του κάλυψε τους τομείς της γεωμετρίας, της κατοπτρικής, της υδραυλικής και της αρχιτεκτονικής. Το όνομά του συνδέθηκε με την γένεση της Μηχανικής στην αρχαία Ελλάδα και με την λύση περίφημων μαθηματικών προβλημάτων.

Επινόησε ιδιοφυείς μηχανές κάθε είδους: τον Ρωμαϊκό ζυγό, το τρίσπαστο και τον ατέρμονα κοχλία ή «έλικα του Αρχιμήδους». Για την μέτρηση του χρόνου κατασκεύασε ένα υδραυλικό ρολόι το οποίο ειδοποιούσε για την αλλαγή της ώρας. Εφηύρε και πολεμικές μηχανές, όπως το αρχιτρόνιτο (πυροβόλο ατμού, το οποίο πολλούς αιώνες αργότερα «επανα-ανακάλυψε» και ο Λεονάρντο Ντα Βίντσι), τους καταπέλτες, (μηχανισμός ο οποίος ανύψωνε και αναποδογύριζε τα εχθρικά πλοία) και τα κάτοπτρα με την βοήθεια των οποίων έκαιγε τα εχθρικά πλοία των Ρωμαίων.

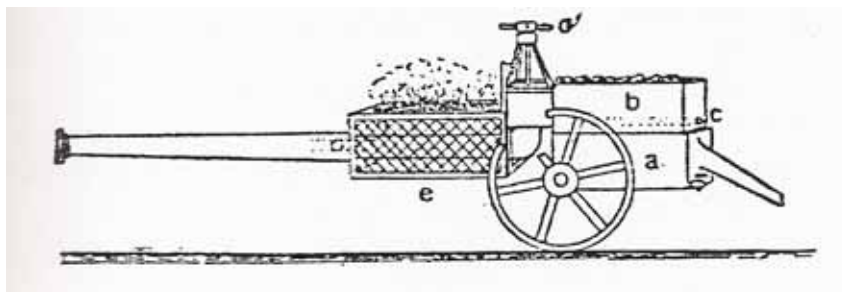
Ο πατέρας της Αναγέννησης Φραγκίσκος Πετράρχης (1304–1374) στο έργο του «*De Remediis Urtiusque Fortuna*»⁷⁷. («Περί θεραπευτικών μέσων εκατέρας των τυχών») γράφει: «Έχω αναρίθμητες μηχανές και βλητικά (βαλλιστικά) μηχανήματα. Τον μη επιδεκτικόν μίμησης κεραυνό κατόρθωσε να τον μιμηθεί η ανθρώπινη μανία καταστροφικότητας. Οι εξακοντιζόμενοι από τις νεφέλες του ουρανού κεραυνοί, εξεσφενδονίζονται τώρα από ένα φονικό μηχανήμα (όργανο), η κάνη του οποίου είναι κατασκευασμένη από σκληρό ξύλο. Μερικοί πιστεύουν ότι το μηχανήμα αυτό εφευρέθηκε από τον Αρχιμήδη, κατά τη διάρκεια της πολιορκίας των Συρακουσών από τα στρατεύματα του στρατηγού των Ρωμαίων Μάρκελλου. Αλλά, όμως, εκείνος (ο Αρχιμήδης) εφεύρε αυτό, στην προσπάθειά του να διαφυλάξει την ελευθερία των συμπολιτών του και να αποτρέψει την καταστροφή της πατρίδας του». Δεν θέλησε όμως να κάνει την τεχνική περιγραφή του.

⁷⁷ http://www.anistor.co.hol.gr/greek/grback/da_vintzi.gr.

Έναν αιώνα μετά το θάνατό του, ένας άλλος συλλέκτης αρχαίων χειρογράφων ο γνωστός Ιταλός ζωγράφος Λεονάρντο Ντα Βίντσι (1452-1519) στην πραγματεία του «*Architronio*» περιέγραψε αυτό το τηλεβόλο. Πρόκειται⁷⁸ για ένα τηλεβόλο με κάνη δύο μέτρων μήκους και διάμετρο μερικά εκατοστά. Στο άκρο της κάνης όπου ο χειριστής τοποθετούσε το σφαιρικό βλήμα, ήταν προσαρμοσμένο μέσα σε ένα δοχείο το οποίο ήταν κλεισμένο αεροστεγώς. Το δοχείο αυτό θερμαινόταν μέχρι το σημείο της διαπύρωσης. Από άλλο δοχείο, το οποίο βρισκόταν λίγο ψηλότερα, μεταφερόταν απότομα με τη χρήση ειδικής στρόφιγγας νερό στο διάπυρο δοχείο. Η ενέργεια που δημιουργούσε η αστραπιαία μετατροπή του νερού σε ατμό, εξασφενδόνιζε το βλήμα.



Ιδιόχειρες σημειώσεις και σχέδια του Λεονάρντο ντα Βίντσι⁷⁹ που αφορούν το ατμοτηλεβόλο του Αρχιμήδη.



Γραμμική αποκατάσταση του σχεδίου του Λεονάρντο ντα Βίντσι για το «*architronio*».

(a=δοχείο ύδατος, b=ανθρακαποθήκη, c=άξονας σκοπεύσεως, d=κοχλίας τροφοδοτήσεως, e=εστία ανθράκων).

⁷⁸ Σταμάτης, Ευάγγελος, «*Άπαντα του Αρχιμήδη*», Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδας, 1964.

⁷⁹ Χρήστος Δ. Λάζος, «*Αρχιμήδης ο ευφυής μηχανικός*», Εκδ.Αίολος, σελίς 179.

2.2 Το πυκνόμετρο ή αραιόμετρο

Ο Αρχιμήδης ανακάλυψε το πυκνόμετρο⁸⁰. Το πλησιέστερο που μπορούμε να εικάσουμε είναι η περιγραφή ενός πυκνομέτρου από τον Συνέσιο⁸¹, επίσκοπο της Πτολεμαίδας της Κυρήνης ο οποίος σε μία επιστολή του προς τη φιλόσοφο Υπατία δίνει οδηγίες για την κατασκευή του:

«Ούτω πάννυ πέπραγα πονηρώς, ὥστε υδροσκόπειον μοι δει. Επίταζον αὐτό χαλκευθῆναι καί συνενωθῆναι. Σωλήν ἐστι κυλινδρικός, αὐλοῦ καὶ σχήμα καὶ μέγεθος ἔχων. Οὗτος ἐπὶ τινὸς εὐθείας δέχεται τὰς κατατομάς, αἱ τῶν υδάτων τὴν ροπὴν ἐξετάζομεν, ἐπιπωματίζει γάρ ἐκ θατέρου κώνος κατὰ θέσιν ἴσην ἐγκείμενος, ὡς εἶναι κοινὴν βάσιν ἀμφοῖν τοῦ τε κώνου καὶ τοῦ σωλήνος. Αὐτὸ δὴ τοῦτο ἐστι τό βαρύλλιον. Ὅταν οὖν εἰς ὕδωρ καθῆς τὸν αὐλόν, ὀρθὸς ἐστήξει καὶ παρέξει σοι τὰς κατατομάς ἀριθμεῖν, αἱ δὲ τῆς ροπῆς εἰσὶν γνωρίσματα».

(Τόσο πολύ ανιαρά αισθάνομαι, ὥστε ἔχω ἀνάγκη ἓνα υδροσκόπειο. Παράγγειλε νὰ το ετοιμάσουν καὶ νὰ το συναρμολογήσουν. Αὐτὸ εἶναι κυλινδρικός σωλήνας σὲ σχῆμα καὶ μέγεθος φλογέρας. Ἐχει κατὰ τὸ μήκος τοῦ χαραγματιῆς μετὰ τις ὁποῖες ἐξετάζουμε τὴν πυκνότητα τῶν υγρῶν. Στὸ ἓνα ἄκρο τοῦ τοποθετεῖται ἓνας κώνος σαν πῶμα, ἔτσι ὥστε ὁ σωλήνας καὶ ὁ κώνος νὰ ἔχουν κοινὴ βάση. Ὁ κώνος αὐτός εἶναι τὸ βαρίδι. Ὅταν λοιπὸν τοποθετήσουμε τὴν φλογέρα στὸ νερό θὰ μείνῃ κατακόρυφος καὶ θὰ σοῦ ἐπιτρέψει νὰ μετρήσεις τὶς χαραγματιῆς, οἱ ὁποῖες ἐκφράζουν τὴν πυκνότητα).

⁸⁰ 'Αρχιμήδους Ἀπαντα', ἐκδότης Εὐάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α, σελὶς 7.

⁷⁸ 'Αρχιμήδους Ἀπαντα', ἐκδότης Εὐάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 178.

2.3 Μια αστρονομική συσκευή

Μία αστρονομική συσκευή η οποία υπολόγιζε τα μεγέθη των άστρων και τις αποστάσεις μεταξύ τους η οποία μνημονεύεται από τον ίδιο τον Αρχιμήδη⁸² στο σύγγραμμα του «Ψαμμίτης». Στην ανακάλυψη αυτή αναφέρεται ο Μακρόβιος⁸³ με την παρακάτω επιστολή:

«Et Archimedes quidem stadiorum numerum deprehendisse se credidit, quibus a terrae supersicie luna distaret, et a luna Mercurius, a Mercurio Venus, sol a Venere, Mars a sole, a Marte Juppiter, Saturnus a Jove. Sed et a Saturni orbe usque ad ipsum stelliserum coelum omne spatium se ratione emensum putavit. Quae tamen Archimedis dimensio a Platonis repudiate est, quasi dupla et tripla intervalla non servans».

(Και ο Αρχιμήδης βεβαίως πίστευε ότι υπολόγισε τον αριθμό των σταδίων που απέχει η Σελήνη από την επιφάνεια της Γης, από την Σελήνη ο Ερμής, από τον Ερμή η Αφροδίτη, ο Ήλιος από την Αφροδίτη, ο Άρης από τον Ήλιο, ο Δίας από τον Άρη, ο Κρόνος από τον Δία. Αλλά και από την τροχιά του Κρόνου μέχρι τον Ουρανό νόμιζε ότι με υπολογισμούς καταμέτρησε την απόσταση όλων. Όμως αυτή η καταμέτρηση του Αρχιμήδη αντικρούστηκε από τους Πλατωνικούς, η οποία δεν τηρούσε τα διπλά και τριπλά διαστήματα).

⁸² ‘Αρχιμήδους Άπαντα’, εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α, σελίς 7.

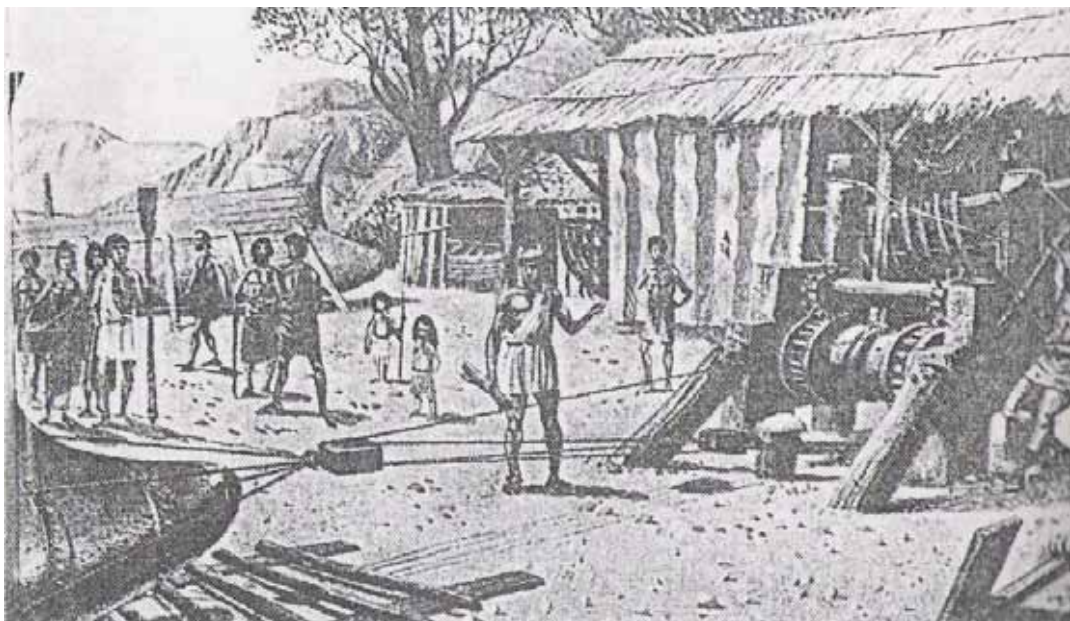
⁸³ ‘Αρχιμήδους Άπαντα’, εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α - Μαρτυρία 227.

2.4 Ο βαρούλκος, η υδροσκοπία και η πνευματική

Μηχανήματα που λειτουργούσαν με τη βοήθεια του νερού, του αέρα ή του ατμού και μηχανήματα έλξεως βαρών. Ο Τζέτζης⁸⁴ στην πραγματεία του αναφέρει:

«[...]Καί πασαν άλλην μάθησιν των μηχανικωτάτων, βαρυολκόν, πνευματικήν, τάς υδροσκοπίας τε, κακ τούτου δέ του γέροντος των βίβλων Αρχιμήδους».

([...]Και κάθε άλλη είδηση για τα μηχανήματα, για τον βαρούλκο, την αεροστατική και την υδροστατική και από τα βιβλία αυτού του γέροντα Αρχιμήδη).

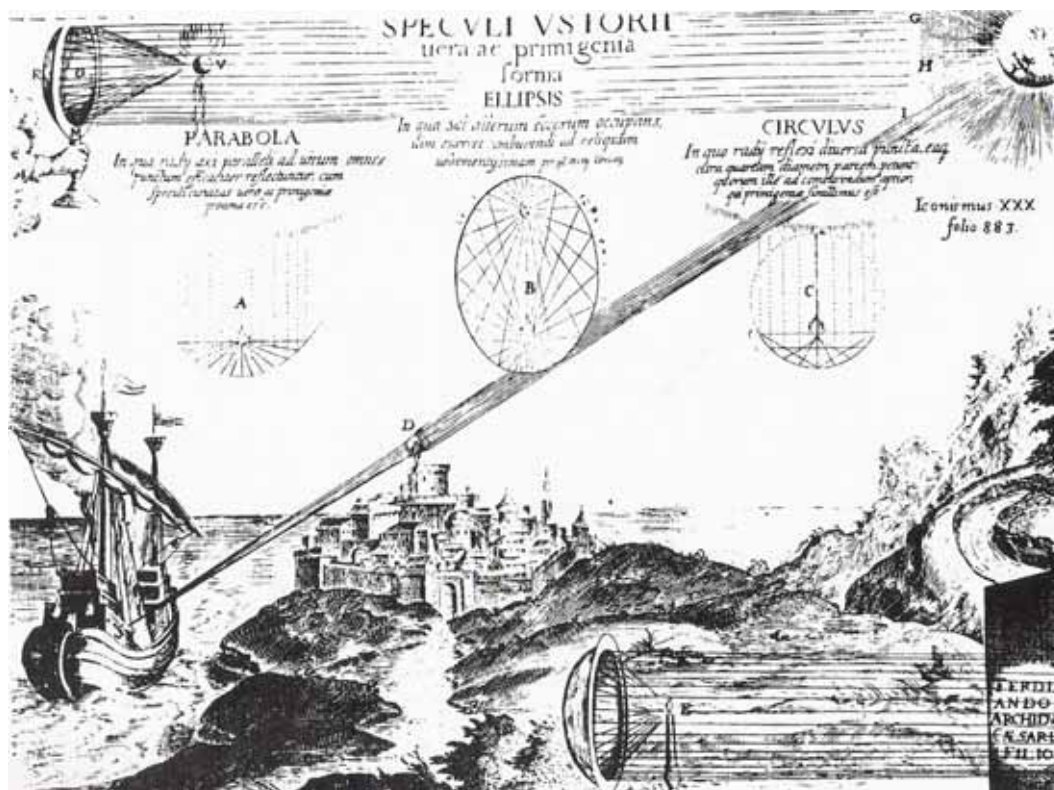


Χειροκίνητο βαρούλκο με οδοντωτούς τροχούς για την κατέλκυση των πλοίων στην ξηρά.

⁸⁴ ‘Αρχιμήδους Άπαντα’, εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 182.

2.5 Τα κάτοπτρα

Αναφέρεται από πολλούς ιστορικούς ότι ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε καυστικά κάτοπτρα εναντίον του Ρωμαϊκού στόλου. Οι πληροφορίες είναι πολύ μεταγενέστερες.



Αυτή η αναπαράσταση του κατορθώματος του Αρχιμήδη προέρχεται από το βιβλίο του Kircher «Η μεγάλη τέχνη του φωτός και της σκιάς».⁸⁵

Σύμφωνα με την πραγματεία του Ανθέμιου⁸⁶ με τίτλο «Περί παραδόξων μηχανημάτων»:

«Πως άν εις τόν δοθέντα τόπον αφεστωτα ουκ έλαττον ή τόζου βολήν κατασκευάσομεν έξαψιν γίνεσθαι διά των ηλιακων ακτίνων, κατά μέν τούς εκθεμένους τάς των λεγομένων πυρίων κατασκευάς δοκει πως αδύνατον είναι τό προτεθέν[...]. Επειδή δέ δέν είναι δυνατόν νά

⁸⁵ Χρήστος Δ. Λάζος, «Αρχιμήδης ο ευφυής μηχανικός», Εκδ. Αίολος, σελίς 104.

⁸⁶ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α - Μαρτυρία 3 και 4.

εξαλειφθη ή δόξα του Αρχιμήδους, διότι έχει ιστορηθη ομοφώνως υπό όλων ότι έκαυσε τά πλοία των εχθρων διά των ηλιακων ακτίνων[....]».

(Πώς θα είναι δυνατόν σε δοθέντα τόπο που απέχει λιγότερο από βολή τόξου (160 μέτρα περίπου) να προκαλέσουμε ανάφλεξη με την βοήθεια των ηλιακών ακτίνων. Σύμφωνα με την γνώμη αυτών που έγραψαν τις κατασκευές των καυστικών κατόπτρων, φαίνεται ότι το ζητούμενο είναι αδύνατο[...]. Επειδή δεν είναι δυνατόν να εξαλειφθεί η δόξα του Αρχιμήδη, διότι το έχουν παραδεχτεί όλοι οι ιστορικοί ομόφωνα ότι έκαψε τα πλοία των εχθρών με ηλιακές ακτίνες[...]).

Ο Δίων Κάσσιος⁸⁷ στην «Ρωμαϊκή Ιστορία» αναφέρει ότι:

«[...]σύμπαν τό ναυτικόν των Ρωμαίων παραδόξως κατέπρησε. Κάτοπτρον γάρ τι πρός τόν ήλιον ανατείνας τήν τε ακτινα αυτου εις αυτό εισεδέξατο και τόν αέρα απ' αυτης τη πυκνότητι καί τη λειότητι του κατόπτρου πυρώσας φλόγα τε μεγάλην εξέκαυσε καί πασαν αυτήν ες τάς ναυς υπό τήν του πυρός οδόν ορμούσας ενέβαλε καί πάσας κατέκαυσεν».

([...]όλο το ναυτικό των Ρωμαίων κατά περίεργο τρόπο το έκαψε. Διότι αφού τοποθέτησε κάτοπτρο προς τον ήλιο το οποίο δεχόταν τις ακτίνες του, με την πυκνότητα τους και χάρη της λείας επιφάνειας του κατόπτρου ζέσταινε τον αέρα και προκαλούσε μεγάλη φλόγα την οποία έστελνε στα πλοία και τα έκαψε όλα).

Ο Ευστάθιος⁸⁸ στα «Σχόλια στην Ιλιάδα» του Ομήρου αναφέρει:

«[...]Αρχιμήδης μέν ο σοφώτατος πολεμικάς ενεπύρισε νηας ως οιά τις κεραυνοβόλος[...].»

([...]ο σοφώτατος Αρχιμήδης έκαιγε τα πολεμικά πλοία σαν να έριχνε κεραυνό[...]).

⁸⁷ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α - Μαρτυρία 13.

⁸⁸ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α - Μαρτυρία 20.



Γκραβούρα του 16^{ου} αιώνα από εικονογράφιση ενός συγγράμματος οπτικής του Polonais Witelo (γραμμένου τον 13^ο αιώνα)⁸⁹. Απεικονίζει το κατόρθωμα του Αρχιμήδη με τα εμπρηστικά κάτοπτρα, σε αρκετά απλοποιημένη μορφή. Τρία κάτοπτρα πάνω σε έναν πύργο των Συρακουσών πυρπολούν το ίδιο πλοίο σε τρία διαφορετικά σημεία.

Ο Γαληνός⁹⁰ στην πραγματεία του «Περί Κράσεων» γράφει χαρακτηριστικά:

«Επεί δ' άπαξ η φλόξ εκείνης της ρητίνης ελάβετο, ταχέως επί πασαν ενεμήθη τήν οικίαν. Ούτω δή πως, οίμαι, καί τόν Αρχιμήδη φασί διά των πυρίων εμπρησαι τάς των πολεμιών τριήρεις».

(Επειδή μόλις η φλόγα της ρητίνης εκδηλώθηκε, ταχέως εξαπλώθηκε σε όλη την οικεία. Με τον τρόπο αυτό νομίζω και ο Αρχιμήδης, όπως λένε, έκαψε με τα κάτοπτρα τα πλοία των εχθρών).

⁸⁹ Χρήστος Δ. Λάζος, «Αρχιμήδης ο ευφυής μηχανικός», Εκδ. Αίολος, σελίς 88.

⁹⁰ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α - Μαρτυρία 36.



Ο Έλληνας μηχανικός Ιωάννης Σακκάς⁹¹ με αλλεπάλληλα πειράματα απέδειξε ότι αυτό δεν ήταν μύθος. Το τέταρτο κατά σειρά πείραμά του, έλαβε χώρα στις 6 Νοεμβρίου το 1973 στη Σαλαμίνα. Ο Σακκάς χρησιμοποίησε 70 γυάλινα επιχαλκωμένα κάτοπτρα διαστάσεων 1,70 επί 0,70 μέτρα, τα οποία τοποθέτησε σε κυκλικό σχηματισμό και συγκέντρωσε την ηλιακή ακτινοβολία πάνω σε μια μικρή λέμβο που βρισκόταν στην απόσταση των 55 μέτρων. Η λέμβος ήταν κατασκευασμένη όπως τα πλοία των Ρωμαίων και περιείχε ανάλογα με αυτά αντικείμενα. Ο χρόνος που χρειάστηκε για να καεί ήταν μόνο τρία λεπτά. Το πείραμα του Σακκά έμεινε στην ιστορία των θετικών επιστημών και έγινε παγκόσμια γωστό.

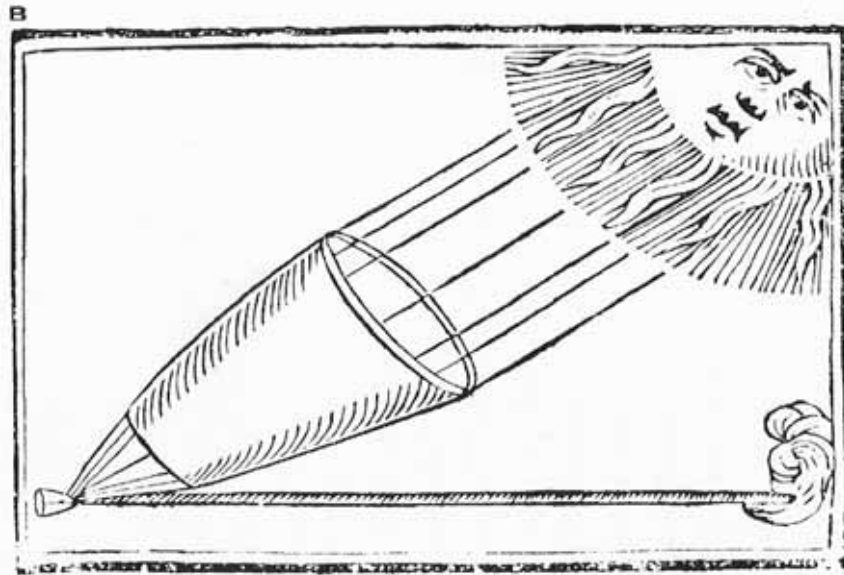
Ο Ιταλός Cavalieri προτείνει μια πρωτότυπη θεωρία για το κάτοπτρο του Αρχιμήδη⁹² την οποίαν αποτελεί ο συνδυασμός του παρακάτω σχήματος. Στο σχήμα αυτό⁹³

⁹¹ Κωνσταντίνος Γεωργακόπουλος, «Αρχαίοι Έλληνες Θετικοί Επιστήμονες», Εκδ.Γεωργιάδης, σελίς 102.

⁹² Χρήστος Δ. Λάζος, «Αρχιμήδης ο ευφυής μηχανικός», Εκδ.Αίολος, σελίς 98.

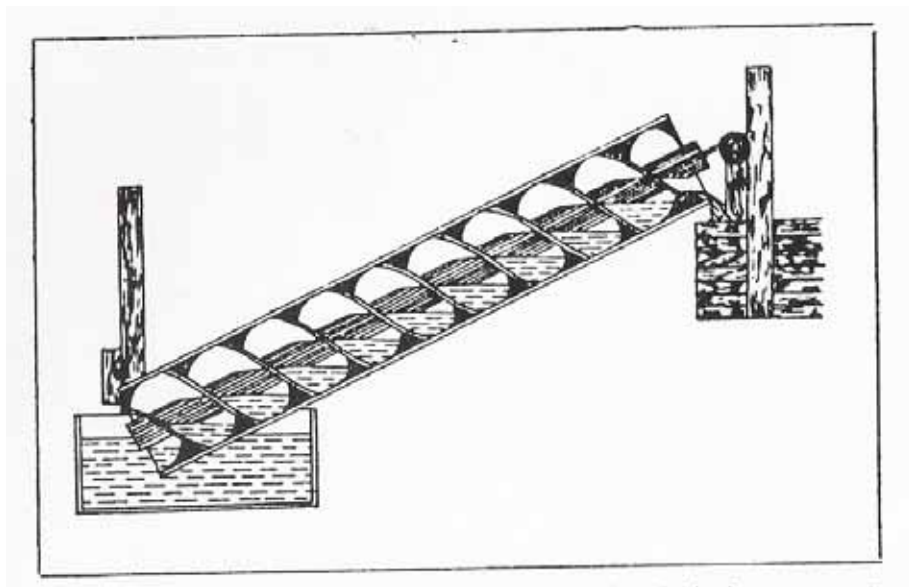
⁹³ Χρήστος Δ. Λάζος, «Αρχιμήδης ο ευφυής μηχανικός», Εκδ.Αίολος, σελίς 98.

απεικονίζεται ένα κόλουρο παραβολοειδές που εστιάζει σε μικρή απόσταση και ακολουθεί ένα κυρτό παραβολοειδές που καθιστά τις ακτίνες παράλληλες, σχηματίζοντας έτσι μια συμπτυκνωμένη δέσμη μεγάλου βεληνεκούς.



2.6 Ο κοχλίας ή έλιξ

Μία συσκευή που χρησίμευε στην άντληση νερού από ποτάμια, φρεάτια και στοές μεταλλίων.



Γραμμική αναπαράσταση από τον L. Sprague de Camp.⁹⁴

Σύμφωνα με τον Διόδωρο τον Σικελιώτη⁹⁵, στην Αίγυπτο την χρησιμοποιούσαν για την άρδευση αγρών που δεν πλημμύριζαν από τα νερά του Νείλου και στην Ισπανία για την άντληση νερού από τους υπονόμους και τα αδαμαντορυχεία⁹⁶. Στην πραγματεία του «Βιβλιοθήκης Ιστορικής Βίβλος Πέμπτη» αποδίδει⁹⁷ την ανακάλυψη αυτή στον Αρχιμήδη γράφοντας:

«Η δέ νησος αύτη πολλαις διώρυξι χειροποιήτοις διείληπται καί χώραν περιέχει καλλίστην της Αιγύπτου. Ποταμόχωστος γάρ ουσα καί κατάρρυτος πολλούς καί παντοδαπούς εκφέρει καρπούς, του μέν ποταμου διά τήν κατ' έτος ανάβασιν νεαράν ιλύν αεί καταχέοντος, των δ' ανθρώπων ραδίως άπασαν αρδεόντων διά τινος μηχανης, ήν επενόησε μέν Αρχιμήδης ο Συρακόσιος, ονομάζεται δέ από του σχήματος κοχλίας».

⁹⁴ Χρήστος Δ. Λάζος, «Αρχιμήδης ο ευφυής μηχανικός», Εκδ. Αίολος, σελίς 144.

⁹⁵ E.J. Dijksterhuis, 'Archimedes', Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987.

⁹⁶ B.L. Van Der Waerden, 'Η απόπνιση της επιστήμης', Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000, σελίς 245.

⁹⁷ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος - Μαρτυρία 15.

(Το νησί λοιπόν αυτό (που σχηματίζεται από το Δέλτα) επειδή είναι χωμένο στον ποταμό παράγει σε μεγάλη ποσότητα κάθε είδους καρπών, ενώ ο εν λόγω ποταμός (ο Νείλος) εξαιτίας της ετήσιας πλημμύρας κατεβάξει νέα λάσπη και οι άνθρωποι αρδεύουν όλη την περιοχή δια μηχανής την οποία επινόησε ο Αρχιμήδης ο Συρακούσιος και ονομάζεται εξαιτίας του σχήματος του, κοχλίας).



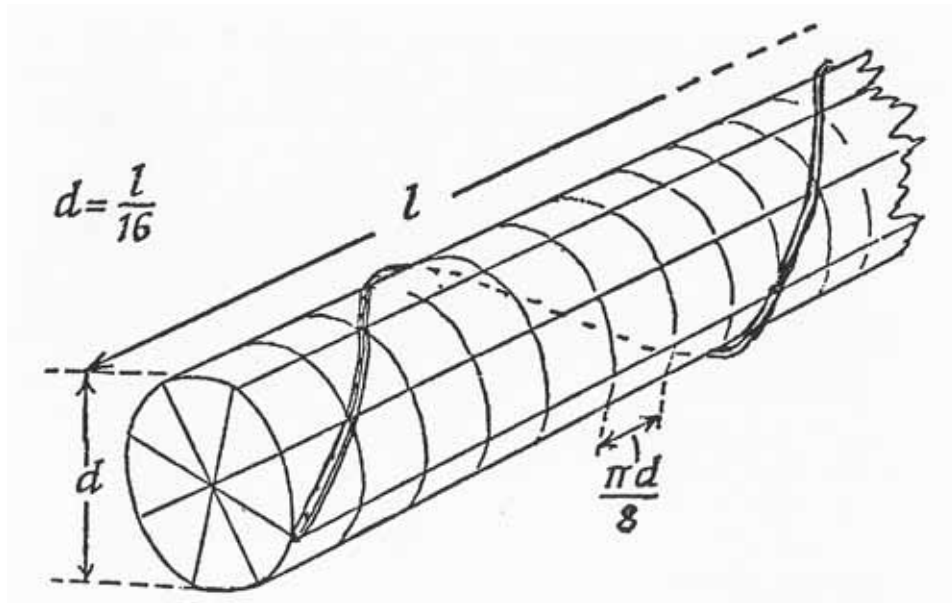
Επιπλέον, σύμφωνα με τον Αθήναιο⁹⁸ αναφέρει ότι με τη βοήθεια της αντλίας διατηρούσαν στεγνά τα αμπάρια του πλοίου «Συρακούσια». Στην πραγματεία του «Δειπνοσοφιστές» γράφει χαρακτηριστικά⁹⁹:

«Περί δέ της υπό Ιέρωνος του Συρακούσιου κατασκευασθείσης νεώς, ης και Αρχιμήδης ην ο γεωμέτρης επόπτης, ουκ άξιον είναι κρίνω σιωπησαι, σύγγραμμα εκδόντος Μοσχίωνός τινος, ω ου παρέργως ενέτυχον υπογυίως. Γράφει ουν ο Μοσχίων ούτως: '[...] Αρχιμήδης ο μηχανικός μόνος αυτό κατήγαγε δι' ολίγων σωμάτων. Κατασκευάσας γάρ έλικα, τό τηλικουτον σκάφος εις τήν θάλασσαν κατήγαγε. Πρώτος δ' Αρχιμήδης ευρε τήν της έλικος κατασκευήν.'».

(Περί του πλοίου που κατασκευάστηκε από τον Ιέρωνα τον Συρακούσιο, του οποίου επόπτης ήταν ο γεωμέτρης Αρχιμήδης, κρίνω ότι δεν είναι άξιο να αποσιωπήσω σύγγραμμα που εκδόθηκε από κάποιον Μοσχίωνα το οποίο περιήλθε όχι τυχαίως στην γνώση μου. Γράφει λοιπόν ο Μοσχίων τα εξής: «[...]ο Αρχιμήδης ο μηχανικός, μόνος του το μετέφερε (το πλοίο) με την βοήθεια λίγων συσκευών. Διότι κατασκεύασε έλικα και το τόσο μεγάλο πλοίο το μετέφερε στην θάλασσα. Πρώτος ο Αρχιμήδης ανακάλυψε την κατασκευή της έλικας»).

⁹⁸ E.J. Dijksterhuis, 'Archimedes', Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987.

⁹⁹ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α - Μαρτυρία 7.



Μέθοδος κατασκευής του κοχλίας, με βάση την περιγραφή του Βιτρούβιου από τον J. G. Landels¹⁰⁰.

Ο κοχλίας¹⁰¹ λειτουργούσε με τη μυική δύναμη ενός ανθρώπου που πατούσε σε βαθμίδες στο εξωτερικό του κυλίνδρου και χρησιμοποιήθηκε για πολλούς αιώνες σε όλη την Μεσόγειο, τις χώρες της Β.Αφρικής και της Μέσης Ανατολής. Ειδικά στην Αίγυπτο εξακολουθεί να χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα και παρέχει 160 - 235 λίτρα ανά λεπτό.

¹⁰⁰ Χρήστος Δ. Λάζος, «Αρχιμήδης ο ευφυής μηχανικός», Εκδ.Αίολος, σελίς 148.

¹⁰¹ Κωνσταντίνος Γεωργακόπουλος, «Αρχαίοι Έλληνες Θετικοί Επιστήμονες», Εκδ.Γεωργιάδης, σελίς 102.

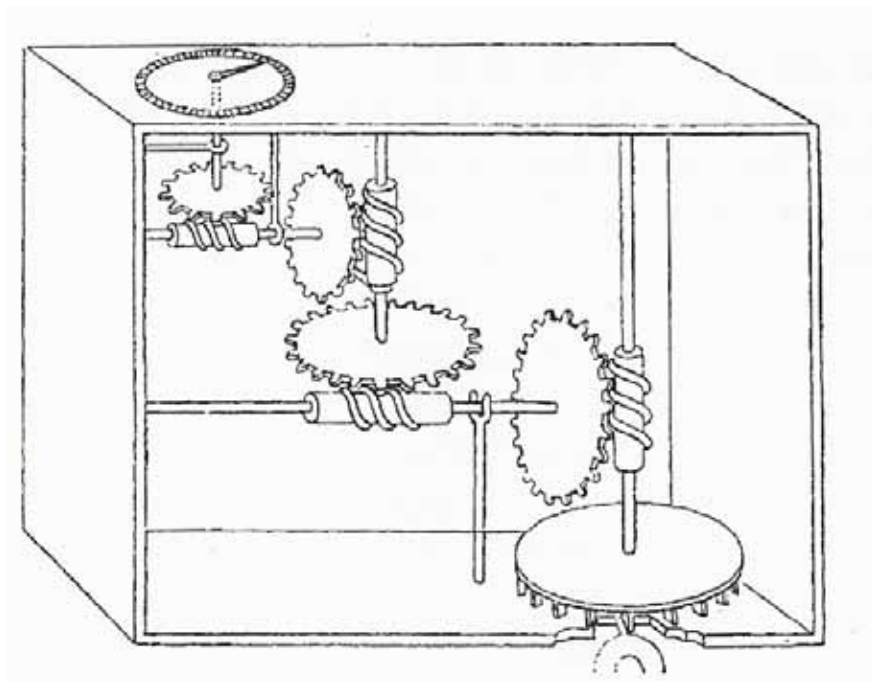
2.7 Το οδόμετρο ή δρομόμετρο

Μία μικρή συσκευή που δούλεψε με την βοήθεια οδοντωτών τροχών την οποία χρησιμοποιούσε για τον υπολογισμό διανυόμενων αποστάσεων σε ξηρά και σε θάλασσα. Από την πραγματεία του Τζέτζη¹⁰² φαίνεται ότι η συσκευή αυτή είναι επινόηση του Αρχιμήδη. Γράφει χαρακτηριστικά:

«[...]τό μετρειν δέ μηχαναις σταδίους της θαλάσσης, καί γην τοις οδομέτροις[...]».

([...]να μετράει με μηχανήματα τα διαστήματα στην θάλασσα και τα διανυόμενα διαστήματα στην ξηρά με οδόμετρα[...]).

Το σχήμα της συσκευής αυτής περιέχεται στην πραγματεία του Ήρωνα του Αλεξανδρέα «Διόπτρα»:



¹⁰² 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α - Μαρτυρία 186.

2.8 Το πλανητάριο ή σφαίρα

Ήταν μία περιστρεφόμενη ανοιχτή σφαίρα με εσωτερικούς μηχανισμούς που παρίστανε τον κόσμο και μέσα στην οποία γινόντουσαν οι κινήσεις του σύμπαντος δηλαδή της σελήνης, του ήλιου, των πλανητών και των ζωδίων, όπως γίνονται στη φύση .

Μία απλή στροφή έθετε σε λειτουργία όλες τις περίπλοκες κινήσεις με τις ποικίλες περιόδους περιστροφής των διαφόρων ουρανίων σωμάτων. «Όταν ο Gallus έθεσε την σφαίρα σε κίνηση», γράφει ο Κικέρων¹⁰³ που είχε δει και ο ίδιος την συσκευή, «μπορούσε να δει κανείς σε κάθε στροφή, τη σελήνη να ανατέλλει μετά τον ήλιο επάνω από το γήινο ορίζοντα, όπως ακριβώς συμβαίνει κάθε μέρα στον ουρανό, και μετά έβλεπε πώς ο ήλιος εξαφανιζόταν και πώς η σελήνη εισερχόταν στον κόνο της σκιάς της γης με τον ήλιο στην απέναντι πλευρά[...]

Για την κατασκευή αυτή έγραψε ο Λακτάντιος¹⁰⁴ σε ένα θεολογικού περιεχομένου έργο του, το ονομαζόμενο «*Divinarum Institutionum*» («Θρησκευιολογία») όπου γράφει χαρακτηριστικά:

«An Archimedes Siculus concavo aere similitudinem mundi ac figuram potuit machinari, in quo ita solem lunamque composuit, ut inaequales motus et caelestibus similes conversionibus singulis quasi diebus efficerent et non modo accessus solis ac recessus vel incrementa deminutionesque lunae, verum etiam stellarum vel inerrantium vel vagarum dispares cursus orbis ille dum vertitur exhiberet».

(Ο Σικελός Αρχιμήδης μπόρεσε να μηχανευθεί σε κοίλη σφαίρα από χαλκό τη μορφή και το ομοίωμα του κόσμου, στο οποίο κατέταξε τον ήλιο και τη σελήνη έτσι ώστε να εκτελούν άνισες κινήσεις όμοιες με τις τροχιές των ουράνιων σωμάτων και όχι μόνο προσπελάσεις και απομακρύνσεις, είτε αυξήσεις και μειώσεις της σελήνης, αλλά εκείνος τα παρείχε αυτά δηλαδή τις άνισες τροχιές και των απλανών και των πλανητών ενώ η σφαίρα στρεφόταν).

Ο Σέξτος Εμπειρικός¹⁰⁵ αισθάνεται δέος απέναντι στην κατασκευή αυτή και το εκφράζει με την πραγματεία του «*Προς Μαθηματικούς*» που είναι η παρακάτω:

¹⁰³ Cicero, De Re publica, I, 14.

¹⁰⁴ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α - Μαρτυρία 223.

¹⁰⁵ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α - Μαρτυρία 161.

*«Τά γε μήν αυτομάτως κινούμενα των κατασκευασμάτων θαυμαστότερα εστι των μή τοιούτων.
Τήν γουν Αρχιμήδειον σφαιραν θεωρουντες σφόδρα εκπληττόμεθα, εν η ήλιός τε καί σελήνη
κινείται καί τά λοιπά των αστέρων, ου μά Δία επί τοις ξύλοις ουδ' επί τη κινήσει τούτων
τεθηπότες, αλλ' επί τω τεχνίτη καί ταις κινούσαις αιτίαις».*

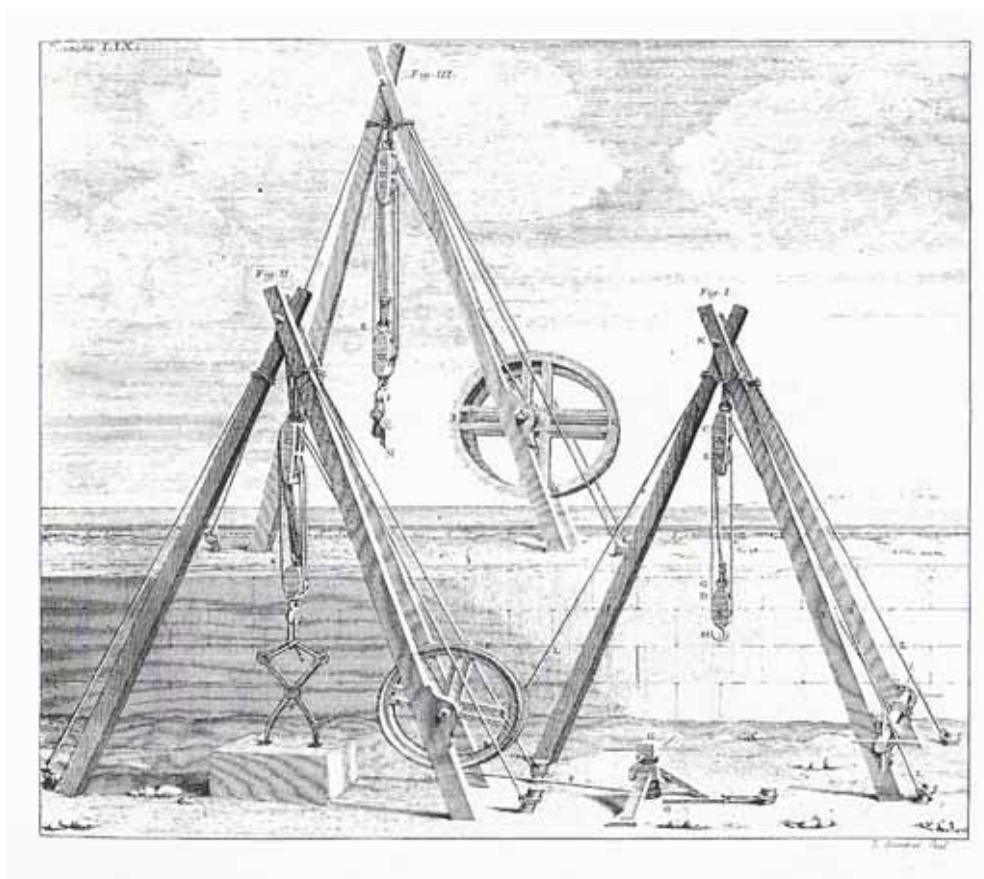
(Διότι τα αυτομάτως κινούμενα των κατασκευασμάτων είναι περισσότερα θαυμαστά από τα μη αυτόματα. Παρατηρώντας λοιπόν την ουράνια σφαίρα (πλανητάριο) του Αρχιμήδη εκπλησσόμαστε πάρα πολύ που κινούνται και ο ήλιος και η σελήνη και τα άλλα άστρα, όμως δεν θαυμάζουμε τον Δία για την κίνηση αυτή των άστρων, αλλά τον τεχνίτη και τις κινούμενες δυνάμεις).

2.9 Το πολύσπαστο

Ήταν ένας ανυψωτικός μηχανισμός με σχοινιά για την οδοιπορία και του οποίου την ανακάλυψη ο Γαληνός¹⁰⁶ στο έργο του «Εις το περί Ιπποκράτους υπόμνημα Δ'» αποδίδει στον Αρχιμήδη όπου γράφει:

«Ει δ' ἄρα τις θέλει καὶ ἄλλοις μηχανήμασι χρησθαι, πρὸς μὲν τὰς οδοιπορίας τὸ πολύσπαστον καλούμενον επιτήδειον, Αρχιμήδους δ' αὐτὸ φασιν εὕρημα εἶναι».

(Εάν λοιπόν θέλει να χρησιμοποιήσει και άλλα μηχανήματα για την οδοιπορία κατάλληλο είναι και το λεγόμενο πολύσπαστο, που λέγεται ότι αυτό είναι ανακάλυψη του Αρχιμήδη).



Πολύσπαστο της εποχής του Αρχιμήδη, από εικονογράφηση του Βιτρούβιου.

Επίσης το τρίσπαστο το οποίο ήταν ιατρικό όργανο και το οποίο αναφέρει ο Ορειβάσιος¹⁰⁷ στην πραγματεία του «Ιατρική συλλογή» στην οποία γράφει:

¹⁰⁶ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α - Μαρτυρία 37.

«Απελλίδους ή Αρχιμήδους τρίσπαστον. Γνωστέον εστίν υμίν εν πρώτοις ότι ούτε ο Απελλίδης ούτε ο Αρχιμήδης ησαν ιατροί, αλλά μηχανικοί άνδρες, οί και τό όργανον επενόησαν, καθάπερ εν τη ιστορία παρειλήφαμεν προς τάς των πλοίων καθολκάς, ου χερσί των κάλων ελκομένων, αλλά εργάταις. Οι δέ τότε ιατροί συστείλαντες τά της κατασκευης μέτρα, τόνιον όργανον ιατρικόν τό τρίσπαστον τουτο πρόσ τούς των εξαρθρωμάτων και των καταγμάτων καταρτισμούς εποίησαν».

(Τρίσπαστο του Αρχιμήδη ή του Απελλίδη. Πρώτα πρέπει να γίνει γνωστό σε εσάς ότι ούτε ο Αρχιμήδης ούτε ο Απελλίδης ήταν γιατροί, αλλά ήταν άντρες μηχανικοί οι οποίοι επινόησαν και το όργανο, όπως μας διδάσκει η ιστορία, για την καθέλκυση των πλοίων με την έλξη των σκοινιών όχι με τα χέρια αλλά με τη βοήθεια των εργατών. Οι τότε γιατροί ελαττώνοντας τις διαστάσεις αυτής της κατασκευής δημιούργησαν όργανο ιατρικό, το λεγόμενο τρίσπαστο, για τις ανακατατάξεις των εξαρθρωμάτων και των καταγμάτων).

¹⁰⁷ ‘Αρχιμήδους Άπαντα’, εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 85.

2.10 Το σιφόνι

Το οποίο αναφέρει ο Ψελλός Μιχαήλ¹⁰⁸ στο έργο του «Άλλος λόγος προς τον αυτόν βασιλέα» όπου γράφει:

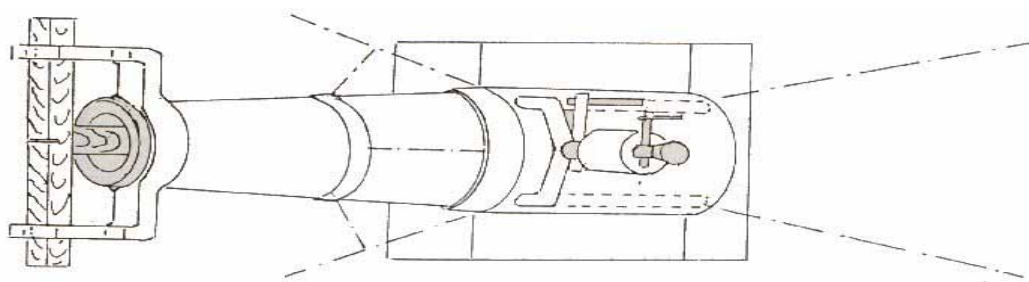
«[...]Τά δέ Ἡρωνος καί Αρχιμήδους εφ' οἷς αὐτός πεποίηκα χαλκεύων ἐτράνωσα ἀπὸ σίφωνός τε καμπύλου τό ὕδωρ ἠώρησα. Καί τετρημένον ἄγγος ἐπέχον τουτο πεποίηκα ἐξ αὐτου τε του στομίου δύο των υγρων φύσεων ἀμίκτως ἐζέχεον».

([...])Τα επιτεύγματα λοιπόν του Ἡρώνα και του Αρχιμήδη βάση των οποίων έκανα ο ίδιος συσκευές, τα διασαφήνισα και με την βοήθεια καμπύλου σιφονιού μετέφερα το νερό. Και αυτό το έκανα αφότου είχα καλύψει με τρυπητό δοχείο την συσκευή και από το στόμιο του έχυνα δύο διαφορετικά υγρά χωρίς να αναμειγνύονται).

¹⁰⁸ ‘Αρχιμήδους Άπαντα’, εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α - Μαρτυρία 131.

2.11 Το τηλεβόλο

Το πρώτο που λειτουργούσε με την πίεση αερίου. Συγκεκριμένα, βάζοντας φωτιά στο ξύλινο άκρο της κάνης και με την είσοδο νερού σε αυτό μέσω βαλβίδας σχηματιζόταν απότομα ατμός, με την τάση του οποίου η σφαίρα εκτοξευόταν έξι στάδια, δηλαδή περίπου 1200 μέτρα μακριά. Το σφαιρικό αυτό βλήμα του τηλεβόλου ήταν λίθινο ή μεταλλικό, βάρους 36 κιλών. Ο Έλληνας μηχανικός Ιωάννης Σακκάς¹⁰⁹ έκανε αναπαράσταση αυτού το 1990.



Κάτοψη του ατμοτηλεβόλου του Αρχιμήδη που κατασκεύασε ο Ιωάννης Σακάς¹¹⁰.



Σχέδιο του Λεονάρντο ντα Βίντσι.

¹⁰⁹ Κωνσταντίνος Γεωργακόπουλος, «Αρχαίοι Έλληνες Θετικοί Επιστήμονες», Εκδ. Γεωργιάδης, σελίς 102.

¹¹⁰ Χρήστος Δ. Λάζος, «Αρχιμήδης ο ευφυής μηχανικός», Εκδ. Αίολος, σελίς 183.

2.12 Το χαριστίωνα

Ένα σταθμικό όργανο (μοχλό), το οποίο αποδίδει στον Αρχιμήδη ο Συμπλίκιος¹¹¹ στο έργο του: «Σχόλια εις Φυσικά Αριστοτέλους» στο οποίο γράφει ότι:

«[...]τό σταθμιστικόν όργανον τόν καλούμενον χαριστίωνα συστήσας ο Αρχιμήδης[...]εκόμπασεν εκείνο τό ‘πα βω καί κινω τάν γαν;’».

([...]κατασκεύασε το σταθμιστικό όργανον ο Αρχιμήδης το λεγόμενο χαριστίωνα[...] φώναξε με περηφάνια το ‘που να ακουμπήσω και μπορώ να κινήσω και τη γη;’).

και ο Ιωάννης Τζέτζης¹¹² ο οποίος γράφει χαρακτηριστικά:

«[...]όστις ειργάσατο πολλές μηχανικές δυνάμεις, καί τη τρισπάστω μηχανη χειρί λαια καί μόνη πέντε μυριομέδιμον καθείλκυσε ολκάδα[...] Έλεγε δέ καί δωριστί, φωνη Συρακουσία. Πα βω καί χαριστιώνι τάν γαν κινήσω πασαν;[...]».

([...]ο οποίος επινόησε πολλές μηχανές, και με τη χρήση τροχαλίας με τρεις δίσκους μόνο με το αριστερό του χέρι καθέλκυσε πλοίο χωρητικότητας 50.000 μεδίωνων - δηλαδή 2.625 τόνων[...] Έλεγε λοιπόν στη γλώσσα των Συρακούσιων: Πού να σταθώ και μπορώ με τη βοήθεια μοχλού να κινήσω όλη τη γη;).

¹¹¹ ‘Αρχιμήδους Άπαντα’, εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρους Α – Μαρτυρία 171.

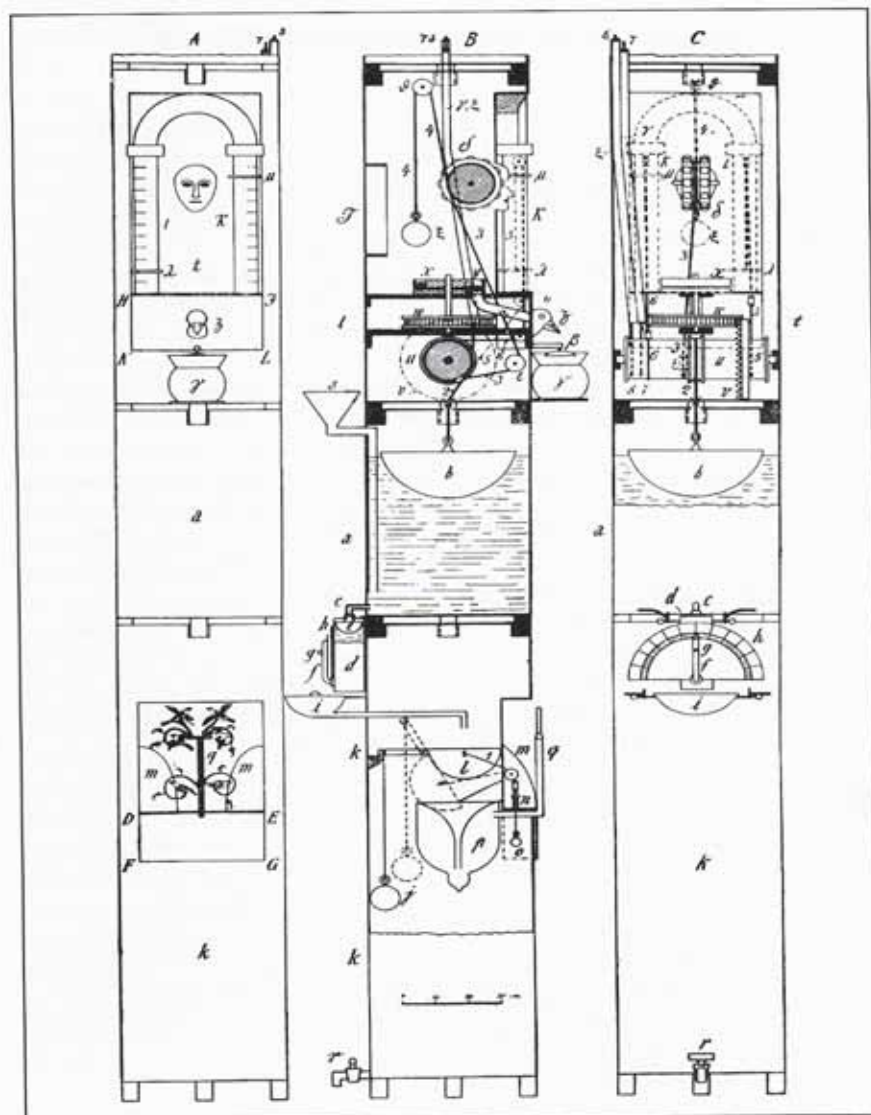
¹¹² ‘Αρχιμήδους Άπαντα’, εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρους Α – Μαρτυρία 182.

2.13 Το υδραυλικό ρολόι

Το οποίο γνωρίζουμε ότι είναι ανακάλυψη του Αρχιμήδη από ένα σχόλιο που έκανε ο μηχανικός Φίλων ο Βυζάντιος¹¹³, το οποίο είναι το παρακάτω:

«Ο Αρχιμήδης ειπεν: 'Αγαπητέ μου Αρίστων, επιθυμω νά σου εξηγήσω πως κατασκευάζονται τά υδραυλικά ωρολόγια'».

Στο επόμενο σχήμα¹¹⁴ αναπαρίσταται το υδραυλικό ρολόι του Αρχιμήδη, κατά τους Γερμανούς επιστήμονες Wiedemann & Hauser.



¹¹³ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α - Μαρτυρία 146.

¹¹⁴ Χρήστος Δ. Λάζος, «Αρχιμήδης ο ευφυής μηχανικός», Εκδ. Αίολος, σελίς 168.

Κεφάλαιο 3^ο

Τα έργα του Αρχιμήδη

3.1 Το παλίμψηστο του Αρχιμήδη

Ο παλίμψηστος κώδικας της Κωνσταντινούπολης περιείχε μερικά κείμενα του Αρχιμήδη που δεν ήταν γνωστά μέχρι την ανακάλυψή του. Προτού όμως εξιστορήσω το δρόμο προς την σπουδαία αυτή ανακάλυψη, θα παραθέσω κάποιες πληροφορίες για το παλίμψηστο. Η λέξη «παλίμψηστο» αποτελείται από τις λέξεις «πάλιν» και «ψάω» που σημαίνουν «πάλι ζύνω». Το παλίμψηστο είναι μία περγαμηνή η οποία έχει ξυστεί για να χρησιμοποιηθεί ξανά.

Όσο αφορά στο παλίμψηστο του Αρχιμήδη, το κείμενο που έχει ξυστεί είναι ένα χειρόγραφο έργο του Αρχιμήδη και πάνω από αυτό έχει γραφτεί κάθετα ένα άλλο έργο το οποίο αποτελείται από¹¹⁵ ένα λειτουργικό Ευχολόγιο και 4 μινιατούρες που απεικονίζουν τους Ευαγγελιστές. Το Ευχολόγιο περιλαμβάνει έναν εξορκισμό του Μ. Βασιλείου, μία προσευχή για την απομάκρυνση των δαιμόνων από τους αγρούς, μία ευχή για να γεννήσουν οι έγκυες γυναίκες υγιή παιδιά και πλήθος άλλων κειμένων. Το Αρχιμήδειο έργο είναι βυζαντινό αντίγραφο παλαιότερου κειμένου και χρονολογείται από τον 10^ο αιώνα ενώ το Ευχολόγιο γράφτηκε δύο αιώνες αργότερα. Συγκεκριμένα, θεωρείται ότι ο κώδικας γράφτηκε κατά το τρίτο τέταρτο του 10^{ου} αιώνα, κατά πάσα πιθανότητα στην Κωνσταντινούπολη, και ότι μετατράπηκε σε παλίμψηστο τον 12^ο αιώνα ή στις αρχές του 13^{ου}.

Το παλίμψηστο αποτελούταν από 174 φύλλα περγαμηνής τα οποία σχεδόν όλα ήταν παλίμψηστα και επιπλέον από 8 φύλλα από χαρτί. Περιείχε¹¹⁶ 55 σχέδια του Αρχιμήδη και 7 από τις πραγματείες του. Πιο συγκεκριμένα τις παρακάτω :

«Περί σφαίρας και κυλίνδρου»

«Περί ελίκων»

τμήματα από το έργο «Κύκλου μέτρησις»

τμήματα από το έργο «Μηχανικά»

τμήματα από το β' βιβλίο του έργου «Περί οχουμένων»

¹¹⁵ Μιχάλης Λάμπρου, 'Το Παλίμψηστο του Αρχιμήδη', Μαθηματικό τμήμα, Πανεπιστήμιο Κρήτης.

¹¹⁶ ΤΑ ΝΕΑ, 04-11-2000, Σελ.Ν27, Κωδικός άρθρου:Α16886Ν271

τη μέχρι τότε άγνωστη αρχή του έργου του Αρχιμήδη «Στομάχιον».

Όμως το σπουδαιότερο εύρημα το οποίο ήρθε στο φως με την αποκρυπτογράφηση του παλίμψηστου ήταν η πραγματεία «Εφοδος». Μέχρι τότε ήταν γνωστός μόνο ο τίτλος του έργου αυτού. Αναφέρεται¹¹⁷ από το λήμμα για το μαθηματικό Θεοδόσιο που περιέχεται στο βυζαντινό λεξικό της Σούδας και από τρεις αναφορές στα «Μετρικά» του Ήρωνα. Από τα προαναφερόμενα έργα τα δύο τελευταία, δηλαδή το «Στομάχιον» και η «Εφοδος» σώζεται σε μοναδικό αντίτυπό τους αυτό που υπάρχει στο παλίμψηστο. Επίσης, στο παλίμψηστο σώζεται το μοναδικό ελληνικό αντίτυπο της πραγματείας «Οχουμένων». (Τα άλλα αντίτυπα είναι σε λατινική μετάφραση). Τα έργα «Περί ελίκων» και «Περί οχουμένων» σώζονται εκτός από το ελληνικό κείμενο και σε λατινική μετάφραση και τέλος τα έργα «Περί σφαίρας και κυλίνδρου», «Κύκλου μέτρησις» και «Μηχανικά» σώζονται στα ελληνικά, στα λατινικά και στα αραβικά.



Η ιστορία του παλίμψηστου του Αρχιμήδη έχει λοιπόν ως εξής: Το παλίμψηστο βρισκόταν κάποτε στη Μονή του Αγίου Σάββα στα Ιεροσόλυμα που έπειτα μεταστεγάστηκε στο Πατριαρχείο Ιεροσολύμων. Από εκεί, πριν από τα μέσα του 19^{ου} αιώνα βρέθηκε, άγνωστο το πως, στο Μετόχι του Παναγίου Τάφου στην Κωνσταντινούπολη (καταχωρισμένο στην βιβλιοθήκη ως «Κώδιξ ιεροσολυμίτικος» υπ' αριθμόν 355). Σύμφωνα με τον Γερμανό λόγιο και γνωστό για την ανακάλυψη του Σιναϊτικού κώδικα της Βίβλου Konstantin von Tischendorf, όπως ο ίδιος αφηγείται στο βιβλίο του Reise in der Orient (Ταξίδι στην Ανατολή), το χειρόγραφο βρισκόταν εκεί τουλάχιστον από το 1846. Ο Tischendorf επισκέφτηκε αυτήν τη βιβλιοθήκη και μάλιστα αφαίρεσε με μη νόμιμο και μη

¹¹⁷ Γιάννης Χριστιανίδης, 'Το Παλίμψηστο αποκαλύπτει το αληθινό «εύρηκα» του Αρχιμήδη', Ελευθεροτυπία, Δευτέρα 15 Ιανουαρίου 2001.

ηθικό τρόπο ένα φύλλο από το έργο, το οποίο από το 1876 βρίσκεται στη βιβλιοθήκη του Πανεπιστημίου του Cambridge καταλογραφημένο με τον αριθμό Additional 1879.23.

Η ενέργεια αυτή του Tischendorf βέβαια δεν μας αφήνει προ εκπλήξεων αν αναλογιστούμε το γεγονός ότι ο άνθρωπος αυτός είχε ήδη στην κατοχή του 43 μονόφυλλα από ισάριθμα σημαντικά χειρόγραφα και τον τρόπο με τον οποίο χειρίστηκε την κατάσταση την σχετική με τον Σιναϊτικό κώδικα. Πιο συγκεκριμένα, ο Tischendorf το 1862 επισκέφτηκε την Μονή της Αγίας Αικατερίνης του Σινά ως διαπραγματευτής ανάμεσα στον Τσάρο της Ρώμης και τον Πατριάρχη Αλεξανδρείας Κύριλλο. Ο Τσάρος ήθελε τον Σιναϊτικό κώδικα για να εκδώσει το κείμενο αυτό των Γραφών από έγκυρο πρωτότυπο για την ορθόδοξη Ρωσία, κάτι το οποίο δέχτηκε ο Κύριλλος. Και σε αυτό το σημείο που ο Κύριλλος είχε συμφωνήσει να δανείσει τον κώδικα ο Tischendorf αφήνει να εννοηθεί στον Τσάρο ότι αγόρασε τον κώδικα. Δημιουργήθηκε έπειτα ένα σοβαρό διπλωματικό επεισόδιο στο οποίο ενεπλάκησαν ο κόμης Ignatev και ο Ρώσος ορθόδοξος Antonin Karustin ως διαπραγματευτές και το οποίο λύθηκε ύστερα από το θάνατο του Κυρίλλου από το διάδοχο του Καλλίστρατο. Ο Καλλίστρατος όντας γενναιόδωρος χάρισε τον κώδικα στον Τσάρο ως ένδειξη σεβασμού από το Πατριαρχείο στις ευεργεσίες των ομόδοξων Ρώσων προς τον τότε δοκιμαζόμενο ελληνικό λαό. Σήμερα, ο Σιναϊτικός κώδικας βρίσκεται στο Βρετανικό Μουσείο το οποίο τον αγόρασε από την μετέπειτα Σοβιετική Ένωση.

Προφανώς ο Tischendorf ήθελε να ταυτοποιήσει το μαθηματικό περιεχόμενο του χειρογράφου, κάτι το οποίο δεν κατάφερε, με απώτερο σκοπό να το πουλήσει σε ενδιαφερόμενους αγοραστές. Αναγνώρισε την αξία του αλλά δεν διαπίστωσε την Αρχιμήδεια πατρότητα του. Ούτε ο Αθανάσιος Παπαδόπουλος-Κεραμεύς, ο οποίος πρώτος κατέγραψε περιγραφή του, αναγνώρισε ότι πρόκειται για χειρόγραφο του Αρχιμήδη. Το 1899 ο Παπαδόπουλος-Κεραμεύς δημοσίευσε έναν κατάλογο χειρογράφων του Πατριαρχείου των Ιεροσολύμων που περιείχε το παλίμνηστο του Αρχιμήδη και ήταν αυτός ο οποίος το καταχώρησε με την ένδειξη «*Κώδιξ ιεροσολυμιτικός*» υπ' αριθμόν 355. Τον δημοσιευμένο αυτό κατάλογο παρατήρησε ο Γερμανός ιστορικός των Μαθηματικών Hermann Schone και ενημέρωσε σχετικά μ' αυτό τον Δανό λόγιο Heiberg ο οποίος το 1906 επισκέφτηκε την Κωνσταντινούπολη. Ο Heiberg, ο οποίος ήταν σπουδαίος εκδότης πλήθους ελληνικών μαθηματικών έργων, ήταν ο πρώτος ο οποίος με τη χρήση μονάχα μεγεθυντικού φακού αναγνώρισε ότι το χειρόγραφο αυτό περιείχε έργα του Αρχιμήδη και επιπλέον κατάφερε να αποκρυπτογραφήσει μεγάλο μέρος του. Ένα χρόνο αργότερα, το 1907 δημοσίευσε τα αποτελέσματα του στο περιοδικό *Hermes*. Κατόπιν δεύτερης έρευνας η οποία πραγματοποιήθηκε το 1908 ο Heiberg ανέλαβε την επιμέλεια της νέας βελτιωμένης κριτικής

έκδοσης των έργων του Αρχιμήδη η οποία δημοσιεύτηκε από τον οίκο «*Teubner*» από το έτος 1910 ως το 1915¹¹⁸.

Ο κώδικας με το νέο του περιεχόμενο τώρα πια, χρονολογικά βρισκόμαστε στις αρχές της δεκαετίας του 1920, χάθηκε από τη βιβλιοθήκη του Μετοχίου κάτω από αδιευκρίνιστες συνθήκες. Και δυστυχώς δεν είναι το μόνο χειρόγραφο που χάθηκε... Από τα 890 χειρόγραφα, τα 827 βρίσκονται σήμερα στην Εθνική Βιβλιοθήκη στην Αθήνα όπου έφτασαν κρυφά κατά την δεκαετία του 1950. Το υπ' αριθμόν 370 του Καταλόγου του Παπαδόπουλου-Κεραμέως βρίσκεται στην Εθνική Βιβλιοθήκη των Παρισίων τώρα και έχει την νέα αρίθμηση grec 1317, το υπ' αριθμόν 767 του αρχικού καταλόγου βρίσκεται στην βιβλιοθήκη του Πανεπιστημίου του Σικάγου ως MS 129 και το υπ' αριθμόν 364 βρίσκεται στο Μουσείο Τέχνης του Cleveland ως MS 42.152. Τα υπόλοιπα 59 είναι χαμένα.

Επιστρέφουμε στο παλίμνηστο το οποίο πέρασε στα χέρια ενός Γάλλου δημοσίου υπαλλήλου και επιχειρηματία του Marie Louis Sirieix, γνωστού συλλέκτη χειρογράφων. Ο τρόπος με τον οποίο το χειρόγραφο περιέπεσε στον Sirieix δεν είναι γνωστός. Σύμφωνα με το Πατριαρχείο των Ιεροσολύμων ο τρόπος δεν ήταν νόμιμος. Το Μετόχι δεν είχε το δικαίωμα να εκποιεί χειρόγραφα της βιβλιοθήκης του χωρίς την άδεια από τον Πατριάρχη, και τέτοια άδεια δεν δόθηκε ποτέ. Επομένως, το χειρόγραφο κατά πάσα πιθανότητα το έκλεψε είτε ο ίδιος είτε κάποιος μεσάζων. Το 1956, μετά τον θάνατο του Sirieix το χειρόγραφο το κληρονόμησε η κόρη του Anne Guersan η οποία πολλές φορές επιχείρησε να το πουλήσει σε Ελβετικό οίκο δημοπρασιών για ένα τεράστιο ποσό. Το 1998, ύστερα από μια αποτυχημένη της απόπειρα να το πουλήσει κατά τη δεκαετία του 1970, το έστειλε στον οίκο δημοπρασιών Christie's. Αξιοσημείωτο είναι ότι προτού γίνει η δημοπρασία, το Πατριαρχείο διεκδίκησε την επιστροφή του χειρογράφου ως περιουσία του.

Ο οίκος Christie's, προσέφερε ως συμβιβασμό και μάλιστα έξω από τη δημοπρασία το χειρόγραφο προς 400.000 δολάρια, δηλαδή το μισό του ποσού που εκτιμούταν ότι θα κατακυρωνόταν στη δημοπρασία. Η πρόταση όμως δεν έγινε δεκτή. Εάν γινόταν δεκτή το χειρόγραφο θα επέστρεφε στον επί χίλια χρόνια κτήτορα του. Η δημοπρασία λάμβανε χώρα στην Νέα Υόρκη και το Πατριαρχείο προσπάθησε να ματαιώσει την αγοραπωλησία αυτή με δικαστική απόφαση. Όμως η απόφαση ήταν απορριπτική επειδή σύμφωνα με τους γαλλικούς νόμους αφού ο Γάλλος πωλητής κατείχε το χειρόγραφο περισσότερο από 30 χρόνια ήταν νομίμως δικό του. Κατά τη διάρκεια του δικαστηρίου, η

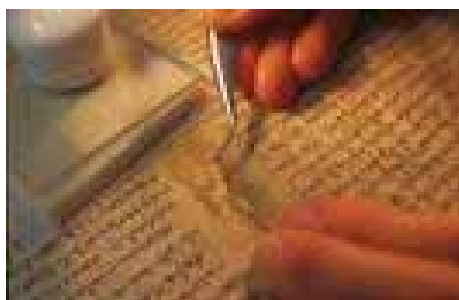
¹¹⁸ Γιάννης Χριστιανίδης, 'Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών', Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2003, σελίς 150.

απέναντι πλευρά υποστήριξε ότι έχει νόμιμους τίτλους αγοραπωλησίας, κάτι που αμφισβήτησε το Πατριαρχείο το οποίο υποστήριξε ότι δεν έχει τέτοιο συμβόλαιο. Τελικά, η δημοπρασία έγινε και έτσι την 29^η Οκτωβρίου του έτους 1998 πουλήθηκε έναντι του ποσού των \$2.000.000 σε συλλέκτη η ταυτότητα του οποίου παραμένει άγνωστη έως σήμερα. Το ποσό αυτό ήταν πολύ πιο πάνω από το αναμενόμενο και ξεπερνούσε το ποσό το οποίο πρόσφερε το ελληνικό κράτος.

Την ημέρα εκείνη, λόγω του μεγάλου ενδιαφέροντος του κοινού αλλά και της κυβέρνησης η οποία προσπάθησε να επανέλθει το χειρόγραφο στα ελληνικά χέρια, ο ελληνικός και διεθνής τύπος έδωσε ευρεία δημοσιότητα στο θέμα. Τα άρθρα που δημοσιεύτηκαν στις εφημερίδες και στα περιοδικά, στην πλειοψηφία τους τόνισαν τη συναισθηματική και τη συμβολική αξία αυτού του «κειμηλίου» της Ελλάδας.

Η επιστημονική αξία του παλίμψηστου του Αρχιμήδη για την ιστορία της αρχαίας ελληνικής επιστήμης είναι τεράστια. Για το λόγο αυτό κρίνεται επιτακτική ανάγκη η νέα μελέτη του χειρόγραφου με τα μέσα που διαθέτουμε στην εποχή μας. Ο νέος ιδιοκτήτης του έχει δείξει εμπιστοσύνη στη διεθνή επιστημονική κοινότητα και με πνεύμα συνεργασίας της το έχει παραχωρήσει με σκοπό τη συντήρηση, τη μελέτη και την αποκρυπτογράφηση του. Συγκεκριμένα, ομάδα ειδικών η οποία περιλαμβάνει την Abigail Quandt (συντηρητή χειρογράφων και σπανίων βιβλίων της Walters Art Gallery στην Βαλτιμόρη), τον βυζαντινολόγο Nigel Wilson (εταίρο στο Lincoln College της Οξφόρδης) και τον Reviel Netz (καθηγητή της αρχαίας επιστήμης στο Πανεπιστήμιο Stanford). Για την ανάγνωση του κειμένου χρησιμοποιούνται τρεις μέθοδοι:

- 1) Η πολυφασματική απεικόνιση (Multispectral Imaging).
- 2) Η ομοεστιακή μικροσκόπηση (Confocal Microscopy).
- 3) Ο μαγνητικός συντονισμός (Magnetic Resonance), που είναι μια μορφή μαγνητικής τομογραφίας.



Όπως όλα έχουν προγραμματιστεί, σύμφωνα με τον Γιάννη Χριστιανίδη¹¹⁹, η επεξεργασία αυτή θα διαρκέσει περισσότερο από πέντε χρόνια. Το χειρόγραφο θα δημοσιευτεί σε μία έκδοση τριών τόμων η οποία: στον πρώτο τόμο θα περιέχει τα φωτογραφικά πανομοιότυπα όλων των σελίδων, στο δεύτερο την έκδοση του αρχαίου κειμένου και στον τρίτο τόμο τον ιστορικό και μαθηματικό σχολιασμό του. Αξίζει μάλιστα να σημειώσουμε ότι το κείμενο μιας σελίδας του χειρογράφου αντιστοιχεί σε 3 ως 4 σελίδες ενός σημερινού βιβλίου.

Από την ανακοίνωση που έκανε ο Reviel Netz στο 5^ο Διεθνές Συμπόσιο για τα Αρχαία Μαθηματικά που έλαβε χώρα στους Δελφούς από τις 17 μέχρι τις 20 Αυγούστου το 2000, έχουμε τις εξής πληροφορίες:

· Όσο αφορά στο έργο *«Περί οχουμένων»* (για το οποίο όμως δεν γνωρίζουμε αν στο χειρόγραφο περιέχονται όλα τα φύλλα της πραγματείας) από την επεξεργασία του παλίμψηστου ήρθε στην επιφάνεια μία νέα πληροφορία¹²⁰. Μία τουλάχιστον από τις σελίδες που έμοιαζε να ανήκει στις «κενές», και έτσι την είχε θεωρήσει και ο Heiberg, περιέχει κείμενο αυτής της πραγματείας. Το κείμενο αυτό έχει ήδη αναγνώσθει και θα δει για πρώτη φορά το φως της δημοσιότητας. Σε άρθρο του στο περιοδικό του Αμερικανικού Ινστιτούτου Φυσικής ο Reviel Netz γράφει¹²¹: *«Σε αυτή τη διατριβή του ο Αρχιμήδης αποδεικνύει τον νόμο του περί της άνωσης των σωμάτων και εξάγει συμπεράσματα για την επίπλευση στερεών που έχουν βασικά γεωμετρικά σχήματα»*.

· Όσο αφορά στο έργο του *«Μηχανικά»*, στην πρώτη ενότητα της θεωρίας του ο Αρχιμήδης εξισορροπώντας αντικείμενα που έχουν τα βασικά γεωμετρικά σχήματα καταφέρνει να μετρήσει το εμβαδόν και τον όγκο τους. Με αυτόν τον τρόπο βγάζει γεωμετρικά θεωρήματα από φυσικά πειράματα. Στην δεύτερη ενότητα ο Αρχιμήδης καταφέρνει να υπολογίσει τα άπειρα αθροίσματα. Ο Reviel Netz γράφει χαρακτηριστικά: *«Το πώς κατάφερε, προσθέτοντας άπειρα πολλά αντικείμενα, να βγάλει ένα πεπερασμένο άθροισμα αποτελεί μία τέτοια καινοτομία που είναι δυνατό να συγκριθεί με τα πιο μοντέρνα μαθηματικά. Πραγματικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτή η θεωρία όταν διατυπώθηκε ήταν δύο χιλιάδες χρόνια μπροστά από την εποχή της»*.

¹¹⁹ Γιάννης Χριστιανίδης, *‘Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών’*, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2003, σελίς 151.

¹²⁰ Γιάννης Χριστιανίδης, *‘Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών’*, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2003, σελίς 154.

¹²¹ ΤΑ ΝΕΑ, 04-11-2000, Σελ.Ν27, Κωδικός άρθρου:Α16886Ν271

- Λόγω της βιβλιοδεσίας του χειρογράφου επειδή οι παλιές σελίδες διπλώθηκαν στη μέση, από κάθε σελίδα έχουν χαθεί 1-2 γραμμές του κειμένου οι οποίες βρέθηκαν στη ράχη του βιβλίου. Έτσι, η ροή του κειμένου έτσι όπως το έχει εκδώσει ο Heiberg παρουσιάζει κενά κάθε 3-4 σελίδες. Τώρα όμως που ο κώδικας έχει λυθεί στα ξεχωριστά φύλλα του τα κενά αυτά θα συμπληρωθούν.
- Επιπλέον, θα αναγνωστούν πολλά από τα εδάφια που ο Heiberg τα έχει αντικαταστήσει με αποσιωπητικά επειδή δεν μπορούσε να τα διακρίνει και θα διορθωθούν εκείνα τα οποία είχε αντικαταστήσει υποθετικά.
- Το χειρόγραφο περιέχει 55 σχήματα, εκ των οποίων ο Heiberg άλλα τα έχει απλώς διορθώσει και άλλα τα κατασκεύασε από την αρχή, όμως αλλοίωσε έτσι τον τρόπο σκέψης του Αρχιμήδη.

3.2 Περί σφαίρας και κυλίνδρου

Το πρώτο βιβλίο του έργου του «Περί σφαίρας και κυλίνδρου» ξεκινά με 6 ορισμούς σχετικούς με καμπύλες ή επιφάνειες και συνεχίζει με τα ακόλουθα νέα αξιώματα¹²²:

- 1) Από όλες τις γραμμές που έχουν τα αυτά πέρατα ελάχιστη είναι η ευθεία.
- 2) Εάν δύο καμπύλες κείνται στο ίδιο επίπεδο, έχουν τα αυτά πέρατα και είναι αμφοτέρως «επί τά αυτά κοίλες», και η μία εξ' αυτών περιλαμβάνεται εξ' ολοκλήρου από την άλλη (ή συμπίπτει με αυτή εν μέρει), τότε αυτή είναι η μικρότερη.
- 3) Από τις επιφάνειες οι οποίες καταλήγουν στην ίδια επίπεδη καμπύλη, η επίπεδη είναι η ελάχιστη.
- 4) Εάν δύο επιφάνειες κείνται στο ίδιο επίπεδο, έχουν τα αυτά πέρατα και είναι αμφοτέρως «επί τά αυτά κοίλες», και η μία εξ' αυτών περιλαμβάνεται εξ' ολοκλήρου από την άλλη (ή συμπίπτει με αυτή εν μέρει), τότε αυτή είναι η μικρότερη.
- 5) Εάν η διαφορά μεταξύ δύο άνισων γραμμών, επιφανειών ή στερεών προστεθεί στον εαυτό της έναν αριθμό φορών, θα υπερέχει κάθε προκαθορισμένου μεγέθους του ίδιου είδους.

Αυτό είναι το περίφημο «αίτημα του Αρχιμήδη», το οποίο σύμφωνα με τον ίδιο είχε χρησιμοποιηθεί από τον γεωμέτρη Εύδοξο¹²³.

Ο Αρχιμήδης στην πραγματεία του αυτή διατυπώνει 44 θεωρήματα, που αναφέρονται στην κυρτή επιφάνεια και τον όγκο κυλίνδρου και κόλουρου κώνου και στην επιφάνεια και τον όγκο σφαίρας και σφαιρικού τομέα. Στο 33^ο θεώρημα¹²⁴, αποδεικνύει ότι η επιφάνεια κάθε σφαίρας είναι τετραπλάσια του μεγίστου κύκλου της:

$$\frac{S_{\text{σφαίρας}}}{S_{\text{κυλίνδρου}}} = \frac{2}{3}$$

Άρα, $S_{\text{σφαίρας}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4$ μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας.

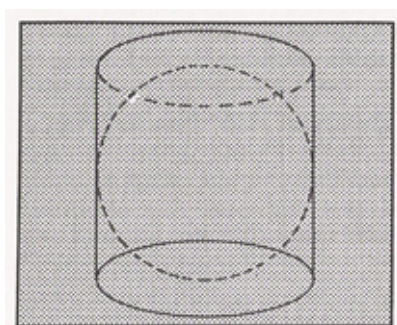
¹²² B.L. Van Der Waerden, 'Η αφύπνιση της επιστήμης', Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000, σελίς 261.

¹²³ Sir Thomas Heath, 'A History of Greek Mathematics', Volume II, From Aristarchus to Diophantus, Dover Publications.

¹²⁴ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α, σελίς 13.

Αυτός ο τύπος είχε εντυπωσιάσει τόσο πολύ τον Αρχιμήδη που ζήτησε να χαραχθεί στον τάφο του.

Από τις πληροφορίες που παίρνουμε από τον Ευάγγελο Σ.Σταμάτη, ως πόρισμα του 34^{ου} θεωρήματος ο Αρχιμήδης θέτει ότι ο κύλινδρος που έχει ως βάση τον μέγιστο κύκλο σφαίρας και ως ύψος την διάμετρό της είναι τα $\frac{3}{2}$ της σφαίρας και η επιφάνειά του είναι τα $\frac{3}{2}$ της επιφάνειας της σφαίρας.



σχήμα 1

Στην συνέχεια, στα θεωρήματα 42 και 43 αποδεικνύει ότι η επιφάνεια σφαιρικού τμήματος μικρότερου ή μεγαλύτερου από το ημισφαίριο είναι ίση με κύκλο που έχει ακτίνα την ευθεία από την κορυφή του τμήματος μέχρι την περιφέρεια του κύκλου, ο οποίος αποτελεί την βάση του τμήματος.

Ο Αρχιμήδης συνεχίζει στην πραγματεία του αυτή με τον υπολογισμό της παράπλευρης επιφάνειας ενός ορθού κυλίνδρου και ενός ορθού κώνου τοποθετώντας τα μεταξύ ενός εγγεγραμμένου και ενός περιγεγραμμένου πρίσματος ή πυραμίδας, με βάση το τέταρτο από τα αξιώματα. Και στις δύο περιπτώσεις, κατασκευάζει έναν κύκλο με επιφάνεια ίση προς εκείνη του κυλίνδρου ή του κώνου. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του κυλίνδρου η ακτίνα αυτού του κύκλου είναι η μέση ανάλογος μεταξύ του ύψους και της διαμέτρου του κυλίνδρου.

Έπειτα ο Αρχιμήδης υπολόγισε την επιφάνεια και τον όγκο της σφαίρας ή ενός τομέα της. Ισχυρίστηκε ότι το εμβαδόν της σφαίρας είναι ίσο με το εμβαδόν τεσσάρων μέγιστων κύκλων. Τον ισχυρισμό αυτόν τον αιτιολόγησε γράφοντας ότι αφού κάθε κύκλος είναι ίσος με τρίγωνο του οποίου η βάση είναι η περίμετρος του κύκλου και το ύψος του είναι η ακτίνα του κύκλου, τότε κάθε σφαίρα θα είναι ίση με κώνο του οποίου η βάση ισούται με την επιφάνεια της σφαίρας και το ύψος με την ακτίνα της.

Όσο αφορά στο δεύτερο βιβλίο αυτής της πραγματείας, περιλαμβάνει 9 προβλήματα τα οποία λύνονται με την βοήθεια των θεωρημάτων του πρώτου βιβλίου και συγκεκριμένα δύο από αυτά οδηγούν σε κυβικές εξισώσεις.

Το πρώτο από αυτά τα προβλήματα, το οποίο ζητά τον προσδιορισμό μιας σφαίρας ίσης προς δεδομένο κώνο ή κύλινδρο, οδηγεί σε μια κυβική εξίσωση της μορφής: $x^3 = b^2 \cdot c$, η οποία επιλύεται με την βοήθεια της πρότασης: «*Δύο δοθεισων ευθειων να ευρεθουν δύο μέσαι ανάλογοι ευθειαι*», δηλαδή με τον προσδιορισμό δύο μέσων αναλόγων μεταξύ των b και c . Το γεγονός ότι ο Αρχιμήδης δεν λέει πως γίνεται αυτό, οδήγησε τον σχολιαστή Ευτόκιο¹²⁵ στην προσπάθεια επίλυσής του, να παραθέσει δώδεκα παρόμοιες λύσεις του διπλασιασμού του κύβου ή του Δήλιου προβλήματος. Αυτή η κίνηση του όμως ήταν άσκοπη αφού ποτέ ο Αρχιμήδης δεν περιελάμβανε στις πραγματείες του προτάσεις οι οποίες είχαν ήδη αποδειχθεί.

Το δεύτερο πρόβλημα, το οποίο αφορά στην διαίρεση μιας σφαίρας σε δεδομένο λόγο με ένα επίπεδο, οδηγεί και αυτό σε μια κυβική εξίσωση της παρακάτω μορφής: $x^2 \cdot (a - x) = b^2 \cdot c$. Ο Αρχιμήδης την διατυπώνει με λόγια ως εξής¹²⁶: «*να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα a σε δύο μέρη x και $a - x$ τέτοια ώστε $\frac{a-x}{b} = (\frac{c}{x})^2$* ». Δυστυχώς το κομμάτι της πραγματείας με την αναλυτική λύση που είχε υποσχεθεί να δώσει ο Αρχιμήδης έχει χαθεί. Παρ' όλα αυτά ο Ευτόκιος βρήκε ένα χειρόγραφο στην Δωρική διάλεκτο το οποίο απέδωσε στον Αρχιμήδη, που περιλαμβάνει την αναγκαία συνθήκη για την επιλυσιμότητά της καθώς και την λύση της, διά της τομής μιας παραβολής και μιας υπερβολής. Η συνθήκη αυτή είναι ότι το bc^2 πρέπει να είναι το πολύ ίσο με την μέγιστη τιμή του $x^2(a - x)$, η οποία επιτυγχάνεται όταν $x = 2 \cdot \frac{\alpha}{3}$.

Στο τέταρτο πρόβλημα αυτού του έργου, ο Αρχιμήδης λέει ότι στο τέλος του προβλήματος θα παραθέσει την ανάλυση και τη σύνθεση μιας πρότασης την οποία χρησιμοποιεί βοηθητικά. Δυστυχώς όμως το σημείο αυτό δε σώθηκε. Ο Ευτόκιος¹²⁷ στα Σχόλια του παραθέτει δύο λύσεις αυτής της πρότασης μία από τις οποίες είναι του Διονυσιοδώρου και η άλλη του Διοκλέους.

¹²⁵ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α, σελίς 14.

¹²⁶ B.L. Van Der Waerden, 'Η απόπνιση της επιστήμης', Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000, σελίς 262.

¹²⁷ Sir Thomas Heath, 'A History of Greek Mathematics', Volume II, From Aristarchus to Diophantus, Dover Publications.

Το τελευταίο πρόβλημα αφορά στην απόδειξη της πρότασης σύμφωνα με την οποία από τα σφαιρικά τμήματα που περιέχονται κάτω από ίση επιφάνεια, μεγαλύτερο είναι το ημισφαίριο. Τέλος, θεωρείται πιθανό ότι αυτό το βιβλίο περιείχε και άλλα ισοπεριμετρικά προβλήματα τα οποία όμως δε διασώθηκαν.

3.3 Κύκλου μέτρησις

Από την πραγματεία αυτή του Αρχιμήδη σώζονται μόνο τρία θεωρήματα. Στο πρώτο από αυτά αποδεικνύεται ότι κάθε κύκλος είναι ίσος με ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου η μία κάθετος είναι ίση με την ακτίνα και η δε άλλη είναι ίση με την περιφέρεια του κύκλου και στο δεύτερο, ότι ο κύκλος προς το τετράγωνο της διαμέτρου του έχει λόγο $\frac{11}{14}$.

Στο τρίτο θεώρημα αποδεικνύεται για πρώτη φορά στην Ιστορία των Μαθηματικών¹²⁸ ότι ο λόγος της περιφέρειας προς τη διάμετρο του κύκλου είναι μικρότερος του $3\frac{1}{7}$ και μεγαλύτερος του $3\frac{10}{71}$, δηλαδή $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ που είναι η πλησιέστερη προσέγγιση της τιμής του $\pi = 3,14$. Η πρόταση αυτή που προσεγγίζει αριθμητικά το π είναι και η πιο ενδιαφέρουσα. Η μέθοδος επιδιώκει να υπολογίσει την περίμετρο δύο κανονικών πολυγώνων 96 πλευρών, το ένα από τα οποία είναι περιγεγραμμένο και το άλλο εγγεγραμμένο σε κύκλο, και ο υπολογισμός αυτός ξεκινά από την σχέση που δίνεται παρακάτω: $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$

Η σχέση αυτή είχε ήδη αποδειχθεί από προγενέστερους μαθηματικούς. Όμως πώς ο Αρχιμήδης έφτασε σε αυτήν την συγκεκριμένη προσέγγιση; Ποια ήταν η σκέψη την οποία ακολούθησε; Ο T.Heath γράφει χαρακτηριστικά: *«Πώς έφτασε ο Αρχιμήδης σε αυτές τις ιδιαίτερες προσεγγίσεις; Κανένα αίνιγμα δεν έχει ασκήσει περισσότερη γοητεία πάνω στους ερευνητές που ασχολούνται με την Ιστορία των Μαθηματικών.»*

Ας δούμε τα τρία αυτά σημαντικά θεωρήματα.

¹²⁸ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α, σελίς 15.

1^ο Θεώρημα:

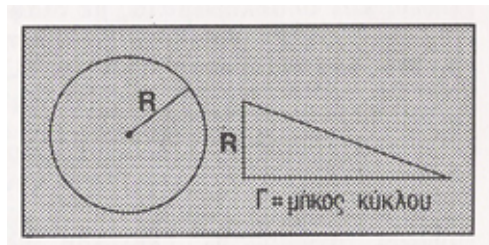
Κάθε κύκλος είναι ίσος με ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου η μία κάθετος είναι ίση με την ακτίνα και η δε άλλη είναι ίση με την περιφέρεια του κύκλου.

Απόδειξη¹²⁹: (Βασίζεται στη μέθοδο εξάντλησης του Ευδόξου που διατυπώνεται με την πρόταση I του X^ο βιβλίου των «Στοιχείων» του Ευκλείδη).

Διατύπωση της πρότασης I:

«Δοθέντων δύο ανίσων μεγεθών, εάν από του μεγαλύτερου αφαιρεθεί μεγαλύτερον του του ημίσεως και από του υπολοίπου μεγαλύτερον του ημίσεως και τούτο γίνεται πάντοτε, θα υπολειφθεί μέγεθος τι, το οποίον θα είναι μικρότερον του δοθέντος μικρότερου μεγέθους».

Συμβολίζουμε με E την επιφάνεια ενός κύκλου ακτίνας R και με ε την επιφάνεια ορθογωνίου τριγώνου του οποίου η μία κάθετη πλευρά είναι ίση με την ακτίνα R του κύκλου αυτού και η άλλη κάθετη πλευρά είναι ίση με το μήκος Γ της περιφέρειας του.



σχήμα 2

Θεωρούμε δύο κανονικά πολύγωνα με n πλευρές, το ένα εγγεγραμμένο και το άλλο περιγεγραμμένο στον κύκλο. Ας συμβολίσουμε τις επιφάνειές τους με I_n και C_n , αντίστοιχα. Αυτό που πρέπει να αποδειχθεί είναι ότι $E = \varepsilon$. Η απόδειξη θα γίνει με την διπλή αντίφαση.

Έστω ότι $E > \varepsilon$. Τότε ισχύει ότι $E - \varepsilon > 0$. Επομένως υπάρχει I_n τέτοιο ώστε

$$0 < E - I_n < E - \varepsilon \Rightarrow$$
$$- I_n < - \varepsilon \Rightarrow$$

¹²⁹ Γιάννης Χριστιανίδης, 'Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών', Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2003, σελίς 132.

$\Rightarrow I_n > \varepsilon$.

Όμως, η επιφάνεια του κανονικού εγγεγραμμένου πολυγώνου με n πλευρές I_n είναι ίση με την επιφάνεια ορθογωνίου τριγώνου του οποίου η μία κάθετη πλευρά είναι ίση με το απόστημα και η άλλη κάθετη πλευρά είναι ίση με την περίμετρο του πολυγώνου. Δεδομένου ότι το απόστημα αυτό είναι μικρότερο από την ακτίνα του κύκλου και η περίμετρος του πολυγώνου είναι μικρότερη από το μήκος της περιφέρειας του κύκλου, η επιφάνεια I_n θα είναι μικρότερη από την επιφάνεια ε . Δηλαδή, $I_n < \varepsilon$ το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την αρχική μας υπόθεση.

Έστω τώρα ότι $E < \varepsilon$. Τότε ισχύει ότι $\varepsilon - E > 0$. Επομένως υπάρχει C_n τέτοιο ώστε $0 < C_n - E < \varepsilon - E \Rightarrow C_n < \varepsilon$.

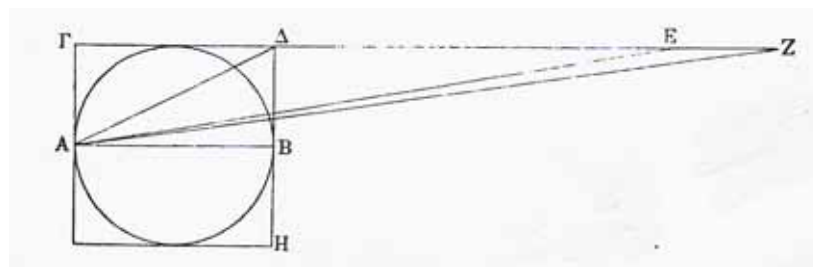
Όμως, η επιφάνεια του κανονικού περιγεγραμμένου πολυγώνου με n πλευρές C_n είναι ίση με την επιφάνεια ορθογωνίου τριγώνου του οποίου η μία κάθετη πλευρά είναι ίση με την ακτίνα και η άλλη κάθετη πλευρά είναι ίση με την περίμετρο του πολυγώνου. Δεδομένου ότι η περίμετρος του πολυγώνου είναι μεγαλύτερη από το μήκος της περιφέρειας του κύκλου, η επιφάνεια C_n θα είναι μεγαλύτερη από την επιφάνεια ε . Δηλαδή, $C_n > \varepsilon$ το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την αρχική μας υπόθεση.

2^ο Θεώρημα:

Ο κύκλος έχει προς το τετράγωνο της διαμέτρου του λόγο ίσο με τον λόγο του 11 προς το 14.

Απόδειξη:

Έστω κύκλος που έχει διάμετρο AB και το τετράγωνο ΓΗ περιγεγραμμένο σε αυτόν. Έστω επίσης η ΔΕ διπλάσια από τη ΓΔ και η ΕΖ ίση με το ένα έβδομο της ΓΔ.



σχήμα 3

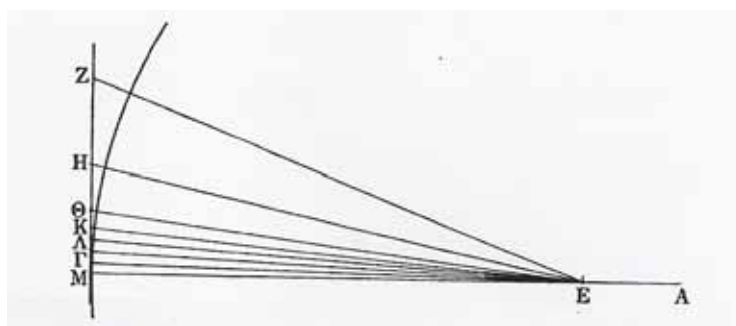
Επειδή το τρίγωνο ΑΓΕ προς το τρίγωνο ΑΓΔ έχει τον λόγο του 21 προς 7 και επειδή το τρίγωνο ΑΓΔ προς το τρίγωνο ΑΕΖ έχει τον λόγο του επτά προς ένα, ο λόγος του τριγώνου ΑΓΖ προς το ΑΓΔ θα είναι ίσος με τον λόγο του 22 προς το 7. Αλλά το τετράγωνο ΓΗ είναι τετραπλάσιο του τριγώνου ΑΓΔ, ενώ το τρίγωνο ΑΓΖ είναι ισοδύναμο με τον κύκλο (επειδή το ύψος του ΑΓ ισούται με την ακτίνα και η βάση του είναι ίση με το τριπλάσιο της διαμέτρου συν ένα τμήμα ελάχιστα μεγαλύτερο από το ένα έβδομό της). Άρα ο κύκλος έχει προς το τετράγωνο ΓΗ λόγο ίσο με τον λόγο του 11 προς το 14.

3^ο Θεώρημα:

Η περιφέρεια κάθε κύκλου είναι μικρότερη από το τριπλάσιο και το ένα έβδομο της διαμέτρου και μεγαλύτερη από το τριπλάσιο και δέκα εβδομηκοστά πρώτης αυτής.

Απόδειξη:

Έστω κύκλος με διάμετρο την ΑΓ και κέντρο το Ε. Έστω η εφαπτόμενη αυτού ΓΛΖ και έστω ότι η γωνία ΖΕΓ ισούται με το ένα τρίτο της ορθής. Άρα ο λόγος της ΕΖ προς την ΖΓ ισούται με τον λόγο του 306 προς το 153 και ο λόγος της ΕΓ προς την ΓΖ με τον λόγο του 265 προς το 153.



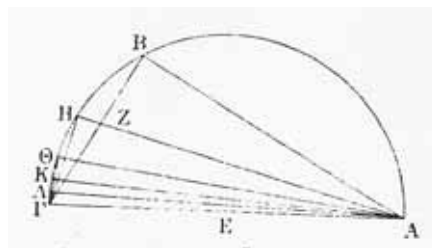
σχήμα 4

Διχοτομούμε την γωνία ΖΕΓ με την ΕΗ και συνεπάγεται ότι ο λόγος της ΖΕ προς την ΕΓ ισούται με τον λόγο της ΖΗ προς την ΗΓ. Επομένως, ο λόγος του αθροίσματος των ΖΕ και ΕΓ προς τη ΖΓ ισούται με το λόγο της ΕΓ προς τη ΓΗ. Άρα, ο λόγος της ΓΕ προς τη ΓΗ είναι μεγαλύτερος του λόγου 571 προς 153. Ο λόγος λοιπόν του τετραγώνου της ΕΗ προς το τετράγωνο της ΗΓ είναι ίσος με τον λόγο του 349.450 προς το 23.409. Συνεπώς, ο λόγος της ίδιας της ΕΗ προς την ΗΓ ισούται με το λόγο του $591 \frac{1}{8}$ προς το 153.

Διχοτομούμε πάλι τη γωνία ΗΕΓ με την ΕΘ και με το ίδιο σκεπτικό, συνεπάγεται ότι ο λόγος της ΕΓ προς τη ΓΘ θα είναι μεγαλύτερος του λόγου του $1.162 \frac{1}{8}$ προς το 153. Επομένως, ο λόγος της ΘΕ προς τη ΘΓ είναι μεγαλύτερος του λόγου του $1.172 \frac{1}{8}$ προς το 153. Για άλλη μια φορά διχοτομούμε τη γωνία ΘΕΓ με την ΕΚ και έχουμε

ότι ο λόγος της ΕΓ προς την ΓΚ είναι μεγαλύτερος του λόγου του $2.334\frac{1}{4}$ προς το 153 και ακόμα ότι ο λόγος της ΕΚ προς τη ΓΚ θα είναι μεγαλύτερος του λόγου του $2.339\frac{1}{4}$ προς το 153. Διχοτομούμε πάλι, τη γωνία ΚΕΓ με τη ΛΕ και έχουμε ότι ο λόγος της ΕΓ προς τη ΛΓ θα είναι μεγαλύτερος του λόγου του $4.673\frac{1}{2}$ προς το 153.

Εφ' όσον λοιπόν η γωνία ΖΕΓ η οποία ισούται με το ένα τρίτο της ορθής διχοτομήθηκε τέσσερις φορές, τότε η γωνία ΛΕΓ θα ισούται με το ένα τεσσαρακοστό όγδοο της ορθής. Με κορυφή το Ε γράφουμε τη γωνία ΓΕΜ ίση με τη ΛΕΓ. Τότε, η γωνία ΛΕΜ θα ισούται με το ένα εικοστό τέταρτο της ορθής. Συνεπάγεται ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ αποτελεί πλευρά περιγεγραμμένου στον κύκλο πολυγώνου με 96 πλευρές. Επειδή όμως δείξαμε ότι ο λόγος της ΕΓ προς τη ΓΔ είναι μεγαλύτερος από τον λόγο $4.673\frac{1}{2}$ προς 153 και επειδή η ΑΓ είναι το διπλάσιο της ΕΓ και η ΑΜ το διπλάσιο της ΓΛ, τότε ο λόγος της ΑΓ προς την περίμετρο του πολυγώνου με τις 96 πλευρές θα είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του $4.673\frac{1}{2}$ προς το 14.688. Το 14.688 είναι το τριπλάσιο του $4.673\frac{1}{2}$ συν ένα υπόλοιπο ίσο με $667\frac{1}{2}$ που είναι μικρότερο από το ένα έβδομο του $4.673\frac{1}{2}$. Συνεπώς, η περίμετρος του περιγεγραμμένου στον κύκλο πολυγώνου είναι μικρότερη από το τριπλάσιο της διαμέτρου αυξημένης κατά ένα διάστημα που είναι μεγαλύτερο από το ένα έβδομο της διαμέτρου. Δηλαδή, η περίμετρος του κύκλου θα είναι μικρότερη από το τριπλάσιο της διαμέτρου αυξημένης κατά περισσότερο από ένα έβδομο.



σχήμα 5

Έστω κύκλος με διάμετρο την ΑΓ και γωνία ΒΑΓ ίση με το ένα τρίτο της ορθής. Τότε ο λόγος της ΑΒ προς τη ΒΓ είναι μικρότερος από τον λόγο του 1.351 προς το 780 και ο λόγος της ΑΓ προς τη ΓΒ είναι ίσος με τον λόγο του 1.560 προς το 780.

Διχοτομούμε τη γωνία ΒΑΓ με την ΑΗ. Εφ' όσον η γωνία ΒΑΗ ισούται με τη γωνία ΗΓΒ και με τη γωνία ΗΑΓ, η γωνία ΗΓΒ θα είναι ίση και με τη γωνία ΗΑΓ. Δεδομένου ότι η ορθή γωνία ΑΗΓ είναι κοινή, συνεπάγεται ότι και η τρίτη γωνία η ΗΖΓ θα είναι ίση με την τρίτη γωνία, την ΑΓΗ. Άρα το τρίγωνο ΑΗΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΓΗΖ και επομένως ο λόγος της ΑΗ προς την ΗΓ ισούται με τον λόγο της ΓΗ προς την ΗΖ και με τον λόγο της ΑΓ προς τη ΓΖ. Όμως ο λόγος της ΑΓ προς τη ΓΖ είναι και λόγος του αθροίσματος των ΓΑ και ΑΒ προς τη ΒΓ. Συνεπώς, ο λόγος του αθροίσματος των ΓΑ και ΑΒ προς τη ΒΓ ισούται με τον λόγο της ΑΗ προς την ΗΓ. Επομένως, ο λόγος της ΑΗ προς την ΗΓ είναι μικρότερος του λόγου του 2.911 προς το 780 και ο λόγος της ΑΓ προς τη ΓΗ είναι μικρότερος του λόγου του $3.013\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ προς το 780.

Διχοτομούμε τη γωνία ΓΑΗ με την ΑΘ και έχουμε ότι ο λόγος της ΑΘ προς τη ΘΓ είναι μικρότερος του λόγου του $5.924\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ προς το 780 ή του λόγου του 1.823 προς το 240 (επειδή ο κάθε ένας από τους όρους αυτούς είναι τα $\frac{4}{13}$ των αντίστοιχων όρων του προηγούμενου λόγου). Επομένως, ο λόγος της ΑΓ προς τη ΓΘ είναι μικρότερος του λόγου του $1.838\frac{9}{11}$ προς το 240.

Διχοτομούμε και τη γωνία ΘΑΓ με την ΚΑ και έχουμε ότι ο λόγος της ΚΑ προς την ΚΓ είναι μικρότερος του λόγου του 1.007 προς το 66. Άρα, ο λόγος της ΑΓ προς την ΚΓ είναι μικρότερος από τον λόγο του $1.009\frac{1}{6}$ προς το 66. Διχοτομούμε τώρα τη γωνία ΚΑΓ με την ΑΛ. Ο λόγος της ΑΛ προς τη ΛΓ είναι μικρότερος του λόγου του $2.016\frac{1}{6}$ προς το 66, αλλά ο λόγος της ΑΓ προς τη ΛΓ είναι μικρότερος από τον λόγο του $2.017\frac{1}{4}$ προς το 66. Με αντιστροφή των ανισοτήτων προκύπτει ότι ο λόγος της περιμέτρου του πολυγώνου προς τη διάμετρο είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του 6.336 προς το $2.017\frac{1}{4}$, ενώ το 6.336 είναι μεγαλύτερο από το γινόμενο του $3\frac{10}{71}$ επί το $2.017\frac{1}{4}$. Συνεπάγεται ότι ο λόγος της περιμέτρου του εγγεγραμμένου 96γώνου προς τη διάμετρο του κύκλου είναι μεγαλύτερος

από το τριπλάσιο της διαμέτρου αυξημένο κατά $\frac{10}{71}$. Άρα και η περίμετρος του κύκλου είναι μεγαλύτερη από το τριπλάσιο της διαμέτρου αυξημένο κατά $\frac{10}{71}$.

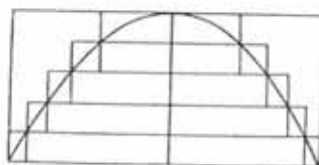
Επομένως, ο λόγος της περιμέτρου του κύκλου προς τη διάμετρο είναι μικρότερος του $3\frac{1}{7}$ και μεγαλύτερος του $3\frac{10}{71}$.

3.4 Περί κωνοειδών και σφαιροειδών

Ο Αρχιμήδης¹³⁰ καλεί *ορθογώνια κωνοειδή* τα παραβολοειδή εκ περιστροφής, *αμβλυγώνια κωνοειδή* τα υπερβολοειδή εκ περιστροφής ενώ *σφαιροειδή* καλεί τα ελλειψοειδή εκ περιστροφής, τα οποία διαχωρίζει στα επιμήκη και στα πεπλατυσμένα. Στην πραγματεία του «Περί κωνοειδών και σφαιροειδών», η οποία περιέχει 32 θεωρήματα και 1 πόρισμα μετά το έκτο θεώρημα, υπολογίζει τον όγκο του σφαιροειδούς και όλων των τμημάτων όλων των σφαιροειδών και των κωνοειδών που αποκόπτονται από ένα τυχαίο επίπεδο. Επίσης, στο έργο αυτό του Αρχιμήδη περιλαμβάνεται και ο υπολογισμός του εμβαδού της έλλειψης και ο υπολογισμός του όγκου της σφαίρας με μία τελείως διαφορετική απόδειξη. Και στα 32 αυτά θεωρήματα γίνεται χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων και Ολοκληρωτικού Λογισμού, όπως σημειώνει¹³¹ ο Δανός H.G. Zeuthen, ο Άγγλος T.L. Heath και ο Ολλανδός E.J. Dijksterhuis.

Στο 4^ο θεώρημα, αποδεικνύεται ότι ο λόγος του εμβαδού της έλλειψης προς το εμβαδόν του κύκλου ο οποίος έχει διάμετρο ίση προς την μεγαλύτερη διάμετρο της έλλειψης, είναι ίσος με τον λόγο της μικρότερης διαμέτρου της έλλειψης προς την μεγαλύτερη διάμετρό της (η οποία όπως ήδη ανάφερα είναι ίση με την διάμετρο του κύκλου).

Επίσης, στο ίδιο θεώρημα ο Αρχιμήδης εφαρμόζει ένα τέχνασμα για την έλλειψη το οποίο θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει για να μετασχηματίσει τα σφαιροειδή σε σφαίρες εκτείνοντας τα ή συμπιέζοντας τα. Όμως για τα σφαιροειδή προτιμά μία νέα μέθοδο η οποία δεν εξαρτάται από τους μετασχηματισμούς δια της εκτάσεως ή της συμπίεσεως.



σχήμα 6

Η μέθοδος αυτή συνίσταται στο ότι το τμήμα του υπό εξέταση κωνοειδούς ή σφαιροειδούς χωρίζεται σε φέτες ίσου πάχους με επίπεδα παράλληλα προς τη βάση καθώς και στο γεγονός ότι καθεμιά από τις φέτες αυτές περικλείεται μεταξύ δύο κυλίνδρων, ενός μικρότερου και ενός μεγαλύτερου.

¹³⁰ Sir Thomas Heath, 'A History of Greek Mathematics', Volume II, From Aristarchus to Diophantus, Dover Publications.

¹³¹ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α, σελίς 16.

Στην περίπτωση του παραβολοειδούς, οι εξωτερικοί κύλινδροι σχηματίζουν μια αριθμητική πρόοδο η διαφορά της οποίας είναι ίση με τον μικρότερο όρο. Δηλαδή ισχύει ότι: $S_1 = A + 2 \cdot A + 3 \cdot A + \dots + n \cdot A$, ενώ οι εσωτερικοί κύλινδροι σχηματίζουν την ίδια πρόοδο χωρίς τον τελευταίο όρο, δηλαδή: $S_2 = A + 2 \cdot A + \dots + (n-1) \cdot A$. Τώρα λέει ο Αρχιμήδης¹³² είναι προφανές ότι το άθροισμα n όρων ίσων με nA είναι μικρότερο από $2 \cdot S_1$ και μεγαλύτερο από $2 \cdot S_2$. Δηλαδή: $2 \cdot S_1 > n \cdot n \cdot A > 2 \cdot S_2$.

Σύμφωνα με τον B. L. Van Der Waerden¹³³, η γεωμετρική ερμηνεία του nA είναι μία στήλη από ίσους κυλίνδρους, όλοι με την ίδια βάση και με το ίδιο ύψος. Αυτοί σχηματίζουν μαζί έναν κύλινδρο C . Έτσι αντί της $2 \cdot S_1 > n \cdot n \cdot A > 2 \cdot S_2$ μπορούμε να γράψουμε την σχέση: $2 \cdot S_1 > C > 2 \cdot S_2$ και επιπλέον έχουμε την σχέση: $S_1 > S > S_2$ όπου S είναι ο όγκος του τμήματος του παραβολοειδούς. Επειδή η διαφορά $S_1 - S_2 = n \cdot A$ παριστάνει τον όγκο του κυλίνδρου στη βάση της στήλης, ο οποίος μπορεί να γίνει όσο μικρός θέλουμε, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα: $S = \frac{1}{2} \cdot C$.

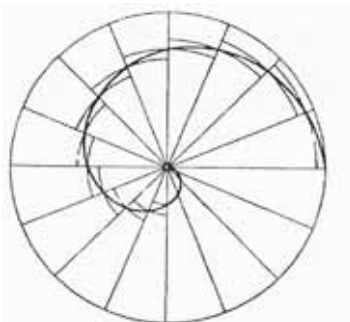
Στην περίπτωση ενός ελλειψοειδούς ή υπερβολοειδούς, οι κύλινδροι δεν σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο. Το άθροισμά τους μπορεί να αναχθεί στο άθροισμα μιας ακολουθίας εμβαδών ορθογωνίων $x \cdot (a \pm x)$, τα ύψη x των οποίων σχηματίζουν μια αριθμητική πρόοδο $b, 2 \cdot b, 3 \cdot b, \dots, n \cdot b$. Αν τώρα το S_1 παριστάνει πάλι το άθροισμα n τέτοιων ορθογωνίων και το S_2 το άθροισμα των ίδιων ορθογωνίων εκτός από τον τελευταίο όρο B , τότε ο Αρχιμήδης αποδεικνύει την ανισότητα: $\frac{n \cdot B}{S_2} > \frac{a + n \cdot b}{\frac{1}{3}(a + n \cdot b)} > \frac{n \cdot B}{S_1}$.

¹³² B.L. Van Der Waerden, 'Η αφύπνιση της επιστήμης', Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000, σελίς 264.

¹³³ B.L. Van Der Waerden, 'Η αφύπνιση της επιστήμης', Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000, σελίς 264.

3.5 Περί ελίκων

Η πραγματεία αυτή περιέχει 28 θεωρήματα, 6 πορίσματα και 7 ορισμούς. Ξεκινά με μία επιστολή που απευθύνεται στον Δωσίθεο όπου ο Αρχιμήδης αναφέρει ότι σε προηγούμενή του επιστολή είχε στείλει και δύο λανθασμένα θεωρήματα για να δει αν θα το αντιληφθούν οι μαθηματικοί εκείνοι της Αλεξάνδρειας που ισχυρίζονται ότι βρίσκουν τα αδύνατα. Ένα από τα δύο ψευδή θεωρήματα είναι το παρακάτω: «*Αν σφαίρα τμηθεί με επίπεδο σε άνισα μέρη, το μεγαλύτερο τμήμα προς το μικρότερο έχει λόγο ίσο προς το τετράγωνο του λόγου της μεγαλύτερης επιφάνειας προς τη μικρότερη*». Επιπλέον, στην ίδια επιστολή χαρακτηρίζει τον τότε θάνατο του Κόνωνα ως μία μεγάλη απώλεια για τα μαθηματικά. Κατόπιν, αναφέρει τα σημαντικότερα αποτελέσματα της πραγματείας του «*Περί κωνοειδών και σφαιροειδών*», 7 θεωρήματα της πραγματείας του «*Περί σφαίρας και κυλίνδρου*», τα απεσταλμένα αυτά ψευδή θεωρήματα και συνεχίζει δίνοντας μια μεθοδική μελέτη των ιδιοτήτων μιας καμπύλης η οποία σήμερα ονομάζεται «*επίπεδη έλικά*» ή «*έλικά του Αρχιμήδη*» ή «*σπείρα του Αρχιμήδη*». Δίνει τον ορισμό της έλικας ως εξής¹³⁴: «*Αν μία ευθεία γραμμή, το άκρο της οποίας είναι σταθερό, κατασκευάστηκε για να περιστρέφεται με ομοιόμορφο ρυθμό στο επίπεδο μέχρι να πέσει στο σημείο απ' όπου ξεκίνησε και εάν στον ίδιο χρόνο που η ευθεία γραμμή περιστρέφεται, ένα σημείο κινείται με ομοιόμορφο ρυθμό κατά μήκος της ευθείας αυτής ξεκινώντας από το σταθερό άκρο της, τότε το σημείο θα γράψει μία έλικά στο επίπεδο*».



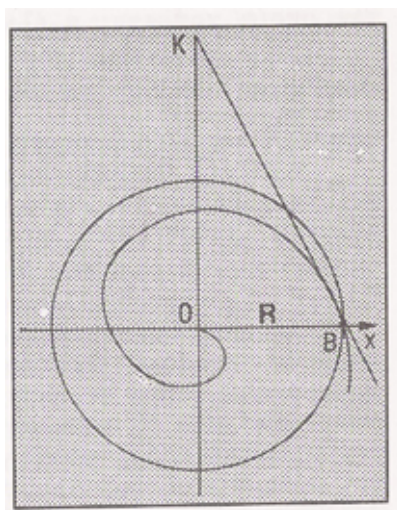
σχήμα 7

Θεωρούμε ημιευθεία ΟΑ που περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα περί ένα σταθερό σημείο Ο. Στην ημιευθεία ΟΑ θεωρούμε ένα κινητό σημείο Μ που κινείται με σταθερή ταχύτητα από το Ο προς το Α. Στην αρχή των χρόνων η ΟΑ συμπίπτει με τον Οχ, το δε κινητό Ρ βρίσκεται στο σημείο Ο. Ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Μ ονομάζεται

¹³⁴ Sir Thomas Heath, 'A History of Greek Mathematics', Volume II, From Aristarchus to Diophantus, Dover Publications.

«έλικα του Αρχιμήδη». Η εξίσωση της έλικας του Αρχιμήδη, σε πολικές συντεταγμένες, είναι: $\rho = \alpha \cdot \theta$, όπου το α = σταθερά και το $\theta \geq 0$. Με τη βοήθεια της καμπύλης αυτής ο Αρχιμήδης πέτυχε, θεωρητικά, τον τετραγωνισμό του κύκλου «με μια μεγαλοφυή σε σύλληψη απόδειξη», όπως γράφει ο P. Tannery¹³⁵.

Στη συνέχεια ο Αρχιμήδης παραθέτει αρκετά θεωρήματα σχετικά με την έλικα. Ένα από τα σημαντικότερα είναι το παρακάτω το οποίο συγκεκριμένα είναι το υπ' αριθμό 18¹³⁶: «Αφότου κατασκευαστεί η έλικα με την πρώτη περιστροφή και από το πέρας της αχθεί εφαπτόμενη, μέχρι αυτή να συναντήσει την κάθετη στην αρχή της έλικας τότε η κάθετη αυτή θα είναι ίση με το μήκος της περιφέρειας του κύκλου ο οποίος έχει ακτίνα την ευθεία με την οποία κατασκευάστηκε η έλικα». Μάλιστα, σύμφωνα με το πρώτο θεώρημα της πραγματείας του Αρχιμήδη «Κύκλου Μέτρησις» σε συνδυασμό με το θεώρημα αυτό επιτυγχάνεται ο τετραγωνισμός του κύκλου από τον Αρχιμήδη.



σχήμα 8

Θεωρούμε μια ευθεία η οποία εφάπτεται στο πέρας της έλικας που γράφεται από την πρώτη στροφή. Θεωρούμε το σημείο Ο αρχή της έλικας και φέρνουμε κάθετη στην ημιευθεία Οχ, η οποία θα συναντήσει την εφαπτομένη σε ένα σημείο Κ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΚ είναι ίσο με το μήκος του κύκλου της πρώτης στροφής, δηλαδή $OK = 2 \cdot \pi \cdot R$. Τότε ο κύκλος του σχήματος με κέντρο Ο και ακτίνα R είναι ισοδύναμος με το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΚ το οποίο μπορεί να μετασχηματιστεί σε τετράγωνο.

¹³⁵ Βαγγέλης Σπανδάγος-Ρούλα Σπανδάγου-Δέσποινα Τραυλού, «Οι Μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδας», Εκδ.Αίθρα, σελίς 181.

¹³⁶ «Αρχιμήδους Άπαντα», εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α, σελίς 17.

Άλλα σπουδαία θεωρήματα της πραγματείας αυτής είναι τα επόμενα:

1) «Το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από έλικα πρώτης περιστροφής και από την ευθεία α που γράφει την έλικα έχει εμβαδόν ίσο με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού κύκλου ακτίνας α».

Δηλαδή, αν συμβολίσω το εμβαδόν της περικλειόμενης επιφάνειας με E τότε $E = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \alpha^2$.

2) «Το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από έλικα τρίτης περιστροφής και από την ευθεία αυτή που γράφει την έλικα ισούται με το διπλάσιο του εμβαδού της επιφάνειας που περικλείεται από έλικα δεύτερης περιστροφής και από την ευθεία αυτή που γράφει την έλικα».

Δηλαδή, αν συμβολίσω το εμβαδόν της περικλειόμενης επιφάνειας με E τότε $E = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \alpha^2$
 $= 2 \cdot \pi \cdot \alpha^2$.

3) «Το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από έλικα τέταρτης περιστροφής και από την ευθεία αυτή που γράφει την έλικα ισούται με το τριπλάσιο του εμβαδού της επιφάνειας που περικλείεται από έλικα δεύτερης περιστροφής και από την ευθεία αυτή που γράφει την έλικα».

Δηλαδή, αν συμβολίσω το εμβαδόν της περικλειόμενης επιφάνειας με E τότε $E = 4 \cdot \pi \cdot \alpha^2$.

4) «Το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από έλικα δεύτερης περιστροφής και από την ευθεία αυτή που γράφει την έλικα είναι ίσο με το εξαπλάσιο του εμβαδού που γράφεται από την έλικα πρώτης περιστροφής και την ευθεία α». Δηλαδή, αν συμβολίσω το εμβαδόν της περικλειόμενης επιφάνειας με E τότε $E = 6 \cdot \pi \cdot \alpha^2$.

Ο Αρχιμήδης στην πραγματεία αυτή ουσιαστικά παρουσιάζει την έλικα ως μια καμπύλη σε πολική μορφή και κάθε της σημείο το εκφράζει με πολικές συντεταγμένες. Υπολογίζει την εφαπτόμενη σε ένα τυχαίο σημείο της έλικας και την επιφάνεια που περικλείεται μεταξύ δύο τυχαίων ακτινικών διανυσμάτων. Η διαδικασία που ακολουθεί είναι η παρακάτω (σε σύγχρονη παρουσίαση): Στρέφει μία γωνία θ και «περπατάει» όσο η ακτίνα.

Χωρίζει το επίπεδο σε ν χωρία παίρνοντας μία γωνία $2 \cdot \frac{\pi}{\nu}$. Έπειτα κάνει προσεγγίσεις φέρνοντας εσωτερικούς και εξωτερικούς τομείς προσεγγίζοντας έτσι το εμβαδόν της έλικας.

Ο τυπικός εσωτερικός τομέας έχει εμβαδόν: $\frac{1}{2} \cdot \text{ακτίνα}^2 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{\nu}$ όπου η ακτίνα

δίνεται από τον τύπο $\kappa \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{\nu}$ με $\kappa = 0, 1, \dots, \nu + 1$.

Έτσι, το συνολικό εμβαδόν των εσωτερικών τομέων είναι:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \left(2 \frac{\pi}{\nu}\right)^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{\nu}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(4 \frac{\pi}{\nu}\right)^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{\nu}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(6 \frac{\pi}{\nu}\right)^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{\nu}\right) + \dots + \frac{1}{2} \cdot \left[(\nu-1) \frac{2\pi}{\nu}\right]^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{\nu}\right) = \\ & = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{\nu}\right)^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{\nu}\right) \cdot [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (\nu-1)^2] = \\ & = 4 \cdot \left(\frac{\pi}{\nu}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \nu \cdot (\nu-1) \cdot (2 \cdot \nu - 1) . \end{aligned}$$

Το εμβαδόν των εξωτερικών τομέων είναι:

$$4 \cdot \left(\frac{\pi}{\nu}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + \nu^2) = 4 \cdot \left(\frac{\pi}{\nu}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \nu \cdot (\nu+1) \cdot (2 \cdot \nu + 1) .$$

Έτσι, το εμβαδόν της έλικας, έστω ότι το συμβολίζουμε με E είναι:

$$4 \cdot \left(\frac{\pi}{\nu}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \nu \cdot (\nu-1) \cdot (2 \cdot \nu - 1) \leq E \leq 4 \cdot \left(\frac{\pi}{\nu}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \nu \cdot (\nu+1) \cdot (2 \cdot \nu + 1) \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3} \cdot \pi^3 \cdot \frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{2 \cdot \nu - 1}{\nu} \leq E \leq \frac{2}{3} \cdot \pi^3 \cdot \frac{\nu+1}{\nu} \cdot \frac{2 \cdot \nu + 1}{\nu} .$$

$$\text{Καθώς το } \nu \text{ τείνει στο άπειρο, } \frac{2}{3} \cdot \pi^3 \cdot 1 \cdot 2 \leq E \leq \frac{2}{3} \cdot \pi^3 \cdot 1 \cdot 2 .$$

Τελικά, $E = \frac{4}{3} \cdot \pi^3$. Δηλαδή, $E = \frac{1}{3} \cdot (\text{εμβαδόν κύκλου ακτίνας } 2\pi)$. Σε αυτό εδώ

το σημείο αξίζει να διατυπώσουμε ότι δεν συνήθιζαν να εκφράζουν τα εμβαδά με τύπους αλλά να τα συγκρίνουν με άλλα. Η μόνη δυσκολία στην απόδειξη είναι η εύρεση του

αθροίσματος της σειράς $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$, για τον οποίο ο Αρχιμήδης δίνει σε γεωμετρική διατύπωση τον ακόλουθο τύπο:

$$3 \cdot [\alpha^2 + (2\alpha^2) + (3\alpha^2) + \dots + (n\alpha^2)] = n \cdot (n\alpha^2) + (n\alpha^2) + \alpha \cdot (\alpha + 2 \cdot \alpha + 3 \cdot \alpha + \dots + n \cdot \alpha).$$

3.6 Μηχανικά ή επιπέδων ισορροπιών ή κέντρα βάρων Α' και Β'

Ο τίτλος της πραγματείας αυτής «*Επίπεδων ισορροπιών ή κέντρα βάρων επιπέδων*» εικάζεται ότι δόθηκε από μεταγενέστερους μαθηματικούς ενώ ο Αρχιμήδης τίτλος ήταν «*Μηχανικά*». Το συμπέρασμα αυτό το εξάγουμε από τα θεωρήματα 6 και 10 της πραγματείας του Αρχιμήδη «*Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής*» όπου ο ίδιος αναφερόμενος στην εύρεση του κέντρου βάρους του τριγώνου και του τραπεζίου λέει χαρακτηριστικά¹³⁷: «*δέδεικται γάρ τουτο εν τοις μηχανικοις*». Τα θεωρήματα αυτά είναι τα κατά σειρά 14 και 15.

Το πρώτο βιβλίο περιλαμβάνει τη θεωρία των μοχλών και αποτελείται από 7 αιτήματα, 15 θεωρήματα και 2 πορίσματα, τα οποία βρίσκονται μετά από το πέμπτο θεώρημα. Το σημαντικότερο από τα αιτήματα αυτά υποστηρίζει ότι¹³⁸: «*Ισα βάρη ισορροπούν σε ίσες αποστάσεις. Αν όταν ίσα βάρη ισορροπούν, κάτι προστεθεί ή αφαιρεθεί από ένα από αυτά η ισορροπία δεν διατηρείται αλλά το βάρος που αυξήθηκε ή δεν ελαττώθηκε επικρατεί.*» Περιλαμβάνει τον περίφημο νόμο των μοχλών: «*Δύο μεγέθη βρίσκονται σε ισορροπία αν οι αποστάσεις τους είναι αντιστρόφως ανάλογες προς τα βάρη*» που αποδεικνύεται για ασύμμετρα και συμμετρικά μεγέθη στο έκτο και στο έβδομο θεώρημα της πραγματείας αυτής.

Στο δέκατο τρίτο και στο δέκατο τέταρτο θεώρημα αποδεικνύεται που βρίσκεται το κέντρο βάρους του τριγώνου ενώ στο επόμενο θεώρημα, στο δέκατο πέμπτο, αποδεικνύεται που βρίσκεται το κέντρο βάρους τραπεζίου που έχει παράλληλες τις δύο πλευρές του.

Το δεύτερο βιβλίο αποτελείται από 10 θεωρήματα σχετικά με το κέντρο βάρους παραβολοειδών επιπέδων τμημάτων. Είναι πολύ πιθανό να υπήρχαν και τα αντίστοιχα θεωρήματα για υπερβολοειδή και ελλειψοειδή τμήματα τα οποία όμως δεν σώθηκαν.

¹³⁷ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α, σελίς 18.

¹³⁸ Sir Thomas Heath, 'A History of Greek Mathematics', Volume II, From Aristarchus to Diophantus, Dover Publications.

3.7 Ο Ψαμμίτης

Ο «Ψαμμίτης» είναι η μόνη σωζόμενη πραγματεία του Αρχιμήδη αριθμητικού περιεχομένου. Είναι αφιερωμένη στον τύραννο Γέλωνα ο οποίος βασίλευσε στις Συρακούσες μετά από τον πατέρα του. Είναι πιθανόν να γράφτηκε πριν το 216 π.Χ.¹³⁹, έτος θανάτου του Γέλωνα. Σκοπός της είναι να δείξει ότι είναι δυνατός ο σχηματισμός κάποιου τεράστιου αριθμού. Ακόμα και ενός αριθμού μεγαλύτερου από τον αριθμό των κόκκων της άμμου που θα περιείχε το σύμπαν, αν αυτό ήταν γεμάτο από άμμο¹⁴⁰. Από το γεγονός αυτό πήρε και το όνομα της: «Ψαμμίτης» (άμμου καταμέτρησης). Θεωρείται πιθανό ότι ο Αρχιμήδης πήρε αφορμή από κάποιο ποίημα του Πινδάρου¹⁴¹ προς τον Ολυμπιονίκη Θήρωνα τον Ακραγαντίνο, βασιλιά του Ακράγαντος της Σικελίας, το οποίο έλεγε:

*«[...]επεί ψάμμος αριθμόν περιπέφενγεν,
καί κεινος όσα χάσματ' άλλοις έθηκεν,
τίς άν φράσαι δύναιτο;[...]».*

([...]όπως η άμμος διαφεύγει την αρίθμηση, έτσι και εκείνου – του Θήρωνος - ποιος θα μπορούσε να μετρήσει τα καλά, τα οποία έκανε στους άλλους;[...]).

Το πρόβλημα το οποίο τίθεται σε αυτήν την πραγματεία είναι ο υπολογισμός των κόκκων της άμμου που περιέχεται στη σφαίρα που περικλείει το σύμπαν, και το οποίον ο Αρχιμήδης θεωρεί πεπερασμένο. Για να βρει αυτόν τον αριθμό, υπολογίζει τη διάμετρο του ήλιου, τη διάμετρο της τροχιάς του ήλιου και τη διάμετρο της σφαίρας του κόσμου, λαμβάνοντας κάθε μία από αυτές τις τιμές οριακά. Λέγοντας δηλαδή ότι η τιμή των μεγεθών που μέτρησε είναι μικρότερη από ορισμένο μεγάλο αριθμό. Τέλος θεωρεί τη διάμετρο του κόκκου της άμμου λίγο μεγαλύτερη από τη συνήθη τιμή και καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η σφαίρα του κόσμου μπορεί να συμπεριλάβει 10^{63} κόκκους άμμου. Ο αριθμός αυτός διαφορετικά διατυπωμένος είναι ο 10^{8*16} (μία μυριάδα μυριάδων εις την μυριοστή μυριάδα και όλο εις την μυριοστή μυριάδα), το μέγεθος του οποίου μπορούμε να αντιληφθούμε λαμβάνοντας υπ' όψιν μας ότι 10^{150} νετρόνια είναι αρκετά για να γεμίσουν ολόκληρο το σύμπαν.

Στην πραγματεία αυτή ο Αρχιμήδης πραγματεύεται ένα σύστημα ταξινόμησης αριθμών κατά «τάξεις» και «περιόδους» και η μέθοδος λειτουργεί στη βάση των οκτάδων.

¹³⁹ Νεώτερον εγκυκλοαιδικόν λεξικόν ΗΛΙΟΥ.

¹⁴⁰ B.L. Van Der Waerden, 'Η αφύπνιση της επιστήμης', Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000, σελίς 245.

¹⁴¹ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α – Μέρος Α, σελίς 20.

Την πρώτη τάξη σχηματίζουν οι αριθμοί από το 1 ως το 10^8 . Ο αριθμός 10^8 θεωρείται ο τελευταίος της πρώτης τάξης και ο πρώτος της δεύτερης. Η δεύτερη τάξη, συνεπώς, αποτελείται από τους αριθμούς 10^8 έως 10^{16} . Σχολιάζοντας το σύστημα αρίθμησης του Αρχιμήδη, ο Thomas Heath¹⁴² λέει ότι: «το σύστημα αυτό υπήρξε απλώς ένα κατόρθωμα

και δε συνδέεται με κανέναν τρόπο με το συνηθισμένο ελληνικό αριθμητικό συμβολισμό».

Ο Αρχιμήδης μέσω της μελέτης των τεράστιων αυτών αριθμών ανέφερε μια αρχή που αργότερα οδήγησε στην ανακάλυψη των λογαρίθμων. Σύμφωνα με την αρχή αυτή¹⁴³ η πρόσθεση των εκθετών των αριθμών όταν η βάση είναι 100.000.000 αντιστοιχεί με την εύρεση του γινομένου των αριθμών.

Το λόγο για τον οποίο ο Αρχιμήδης έγραψε το έργο αυτό εκθέτει ο ίδιος στο προοίμιο γράφοντας χαρακτηριστικά:

«Οιονταί τινές, βασιλεύ Γέλων, του ψάμμου τον αριθμόν άειρον είμεν τω λήθει λέγω δε ου μόνον του ερί Συρακούσας τε και τάν άλλαν Σικελίαν υπάρχοντος, αλλά και του κατά πάσαν χωράν τάν τε οικημέναν και τάν αοίκητον. Εντί δε τίνες δε, οι αυτόν άπειρον μεν είμεν ουχ υπολαμβάνοντι, μηδένα μέντοι ταλικούτον κατωνομασμένον υπάρχει αριθμός, όστις υπερβάλλει το πλήθος αυτού».

(Φρονούν ω βασιλέα Γέλων, μερικοί ότι ο αριθμός των κόκκων της άμμου είναι κατά το πλήθος άπειρος. Εννοώ δε, όχι μόνο τον αριθμό της άμμου ήτις υπάρχει εις τας Συρακούσας και τη λοιπήν Σικελίαν αλλά και εκείνης ήτις υπάρχει εις όλην την έκτασιν της γης την κατοικημένη και την ακατοίκητον. Υπάρχουν δε μερικοί, οίτινες δεν νομίζουν ότι αυτός είναι άπειρος, αλλά φρονούν ότι δεν υπάρχει ουδείς τόσον μεγάλος αριθμός, δηλούμενος δι' ονόματος, όστις υπερβάλλει τον αριθμό της).

¹⁴² Sir Thomas Heath, 'A History of Greek Mathematics', Volume I, From Aristarchus to Diophantus, Dover Publications, σελίς 62.

¹⁴³ Carl B. Boyer – Uta C. Merzbach, «Η ιστορία των Μαθηματικών», Εκδ. Γ.Α. Πνευματικού, σελίς 142.

3.8 Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής

Η πραγματεία αυτή του Αρχιμήδη, η οποία περιλαμβάνει 24 προτάσεις, αρχικά έφερε τον τίτλο «*Τετραγωνισμός παραβολής*», από μεταγενέστερους του Απολλωνίου. Οι αποδείξεις των 17 πρώτων προτάσεων βασίζονται σε θεωρήματα της μηχανικής, ενώ οι αποδείξεις των 7 επόμενων στηρίζονται σε θεωρήματα της γεωμετρίας. Στην εισαγωγική της επιστολή προς τον Δωσίθεο, ο Αρχιμήδης υποστηρίζει ότι το εμβαδόν παραβολικού τμήματος είναι ίσο με τα $\frac{4}{3}$ του τριγώνου το οποίο έχει βάση τη βάση του τμήματος αυτού και ύψος το ίδιο και για να το αποδείξει χρησιμοποιεί το αξίωμα της συνέχειας¹⁴⁴. Παραθέτει τρεις αυστηρές αποδείξεις: μία μηχανική, μια στην οποία κάνει χρήση της μεθόδου της εξάντλησης και μία γεωμετρική όπου χρησιμοποιεί το παρακάτω λήμμα¹⁴⁵: «*Αν υπάρχουν δύο άνισα εμβαδά τότε, ανεξαρτήτως της διαφοράς του μεγέθους του μεγαλύτερου από το μικρότερο, το μεγαλύτερο μπορεί να προεκταθεί αν διαρκώς προσθέτουμε στον εαυτό του το μικρό (εμβαδόν)*». Η μηχανική απόδειξη δίνεται και στην πραγματεία του «*Έφοδος*».

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, ο Αρχιμήδης πέτυχε το τετραγωνισμό του παραβολικού χωρίου μέσω του τριγώνου και για πρώτη φορά τετραγωνίστηκε καμπυλόγραμμο χωρίο με μια μέθοδο που ουσιαστικά αποτελεί την απαρχή του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Όσο αφορά στα υπόλοιπα θεωρήματα του έργου αυτού, οι αποδείξεις των 17 πρώτων θεωρημάτων στηρίζονται στα θεωρήματα της μηχανικής ενώ τα υπόλοιπα θεωρήματα αποδεικνύονται γεωμετρικά. Σε γενικές γραμμές, ο Αρχιμήδης στην πραγματεία του αυτή κάνει χρήση Ολοκληρωτικού Λογισμού και γεωμετρικών προόδων. Στο εικοστό τρίτο θεώρημα βρίσκει το άθροισμα φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με λόγο $\frac{1}{4}$ και στο επόμενο θεώρημα βρίσκει γεωμετρικά το εμβαδόν παραβολικού τμήματος.

¹⁴⁴ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α, σελίς 20.

¹⁴⁵ Sir Thomas Heath, 'A History of Greek Mathematics', Volume II, From Aristarchus to Diophantus, Dover Publications

Άθροισμα γεωμετρικής προόδου:

Αν ένα τυχαίο σύνολο αριθμών A, B, Γ, Δ, E σχηματίζει γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\frac{1}{4}$ τότε το άθροισμά τους αυξημένο κατά το $\frac{1}{3}$ του τελευταίου όρου είναι ακριβώς ίσο με τα $\frac{4}{3}$ του πρώτου όρου.

Απόδειξη:

Αφού το σύνολο των αριθμών A, B, Γ, Δ, E σχηματίζει γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\frac{1}{4}$ θα ισχύει ότι: $A = 4 \cdot B$, $B = 4 \cdot \Gamma$, $\Gamma = 4 \cdot \Delta$ και $\Delta = 4 \cdot E$. Με την βοήθεια αυτών των σχέσεων έχουμε ότι:

$$B + \frac{B}{3} = \frac{4B}{3} = \frac{A}{3}.$$

$$\Gamma + \frac{\Gamma}{3} = \frac{4\Gamma}{3} = \frac{B}{3}.$$

$$\Delta + \frac{\Delta}{3} = \frac{4\Delta}{3} = \frac{\Gamma}{3}.$$

$$E + \frac{E}{3} = \frac{4E}{3} = \frac{\Delta}{3}.$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$B + \Gamma + \Delta + E + \frac{B}{3} + \frac{\Gamma}{3} + \frac{\Delta}{3} + \frac{E}{3} = \frac{A + B + \Gamma + \Delta + E}{3}.$$

Εάν αφαιρέσουμε και από τα δύο μέλη της το $\frac{B}{3} + \frac{\Gamma}{3} + \frac{\Delta}{3}$ έχουμε ότι:

$$B + \Gamma + \Delta + E + \frac{E}{3} = \frac{A + E}{3}.$$

Και προσθέτοντας το A και στα δύο μέλη έχουμε ότι:

$$A + B + \Gamma + \Delta + E + \frac{E}{3} = A + \frac{A + E}{3} \Rightarrow$$

$$A + B + \Gamma + \Delta + E = A + \frac{A}{3} \Rightarrow$$

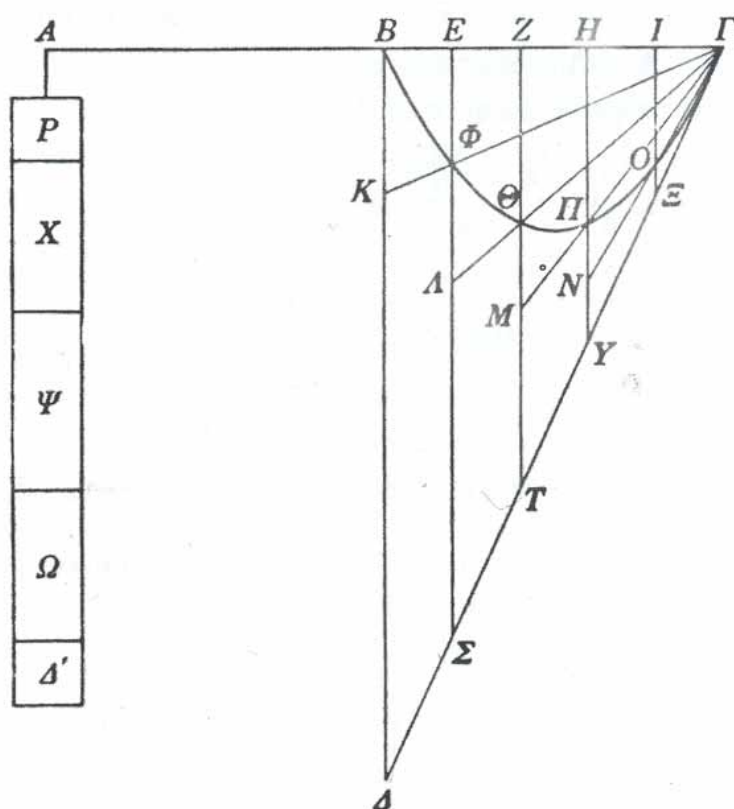
$$A + B + \Gamma + \Delta + E = \frac{4A}{3}.$$

Δηλαδή, βλέπουμε ότι ο Αρχιμήδης αν και δεν αναφέρει πουθενά την έννοια «άθροισμα απείρων όρων» στην πραγματικότητα τη γνωρίζει.

Στη συνέχεια δίνονται τρεις αποδείξεις που αφορούν το εμβαδόν παραβολικού χωρίου.

1^H: Μηχανική

Έστω ένα παραβολικό χωρίο το οποίο σχηματίζεται από μία ευθεία κάθετη στον άξονα, την ΒΓ. Χωρίζουμε την ΒΓ σε πέντε ίσα μέρη και ονομάζουμε τα σημεία αυτά Ε, Ζ, Η και Ι αντίστοιχα. Από τα σημεία αυτά γράφουμε ευθείες παράλληλες στον άξονα τις ΕΦ, ΖΘ, ΗΠ και ΙΟ όπου Φ, Θ, Π και Ο τα σημεία τομής των ευθειών αυτών με το παραβολικό χωρίο. Στην συνέχεια, γράφουμε την εφαπτομένη του παραβολικού χωρίου στο σημείο του Γ και επιπλέον γράφουμε ευθεία παράλληλη στον άξονα με αρχή το σημείο Β. Η ευθεία αυτή τέμνει την προέκταση της εφαπτομένης στο σημείο Δ. Αντίστοιχα, οι ευθείες ΕΦ, ΖΘ, ΗΠ και ΙΟ τέμνουν την εφαπτομένη στα σημεία Σ, Τ, Υ και Ξ. Με τον τρόπο αυτό σχηματίζονται οι παράλληλες στον άξονα ευθείες: ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ.



σχήμα 9

Τώρα, ενώνουμε το σημείο Γ με τα σημεία Φ, Θ, Π και Ο και προεκτείνουμε τις ευθείες αυτές που σχηματίστηκαν. Έτσι, η προέκταση της ΓΦ τέμνει την ΒΔ στο σημείο Κ, η προέκταση της ΓΘ τέμνει την ΕΣ στο σημείο Λ, η προέκταση της ΓΠ τέμνει την ΖΤ στο

σημείο M και τέλος η προέκταση της ΓΟ τέμνει την ΗΥ στο σημείο N. Σε αυτό εδώ το σημείο διατυπώνεται η άποψη σύμφωνα με την οποία το τρίγωνο ΒΓΔ είναι μικρότερο από το τριπλάσιο του αθροίσματος των τραπεζίων ΚΒΕΦ, ΛΕΖΘ, ΜΖΗΠ, ΝΗΙΟ και του τριγώνου ΞΙΓ και μεγαλύτερο από το τριπλάσιο του αθροίσματος των τραπεζίων ΦΕΖΘ, ΘΖΗΠ, ΠΗΙΟ και του τριγώνου ΙΟΓ.

Ο Αρχιμήδης στην προσπάθειά του να αποδείξει τον ισχυρισμό αυτό προέκτεινε την ευθεία ΓΒ και πήρε πάνω σε αυτήν ένα σημείο, το Α τέτοιο ώστε ΒΑ = ΒΓ. Θεωρώντας ως μοχλό το ΑΓ και με υπομόχλιο στο Β, τοποθέτησε τα εμβαδά Ρ, Χ, Ψ, Ω και Δ' στο άκρο Α του βραχίονα όπου εκεί ισορροπούσαν με τα τραπέζια ΔΒΕΣ, ΣΕΖΤ, ΤΖΗΥ, ΥΗΙΞ και το τρίγωνο ΞΙΓ αντίστοιχα. Επομένως, το άθροισμα όλων αυτών των εμβαδών θα ισορροπεί με το τρίγωνο ΒΓΔ και αυτό συνεπάγεται ότι θα ισούται με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του.

Από ιδιότητες της παραβολής, τις οποίες ο Αρχιμήδης δεν παραθέτει αφού τις θεωρεί γνωστές, ισχύει ότι:

$$\frac{BA}{BE} = \frac{BG}{BE} = \frac{ES}{EF} = \frac{\text{τραπέζιο}(\Delta BE \Sigma)}{\text{τραπέζιο}(\text{ΚΒΕΦ})},$$

$$\frac{BA}{BZ} = \frac{\text{τραπέζιο}(\Sigma EZ \text{Τ})}{\text{τραπέζιο}(\Lambda EZ \Theta)},$$

$$\frac{BA}{BH} = \frac{\text{τραπέζιο}(\text{ΤΖΗΥ})}{\text{τραπέζιο}(\text{ΜΖΗΠ})} \text{ και}$$

$$\frac{BA}{BI} = \frac{\text{τραπέζιο}(\text{ΥΗΙΞ})}{\text{τραπέζιο}(\text{ΝΗΙΟ})}.$$

Εάν λοιπόν τα τραπέζια ΔΒΕΣ, ΣΕΖΤ, ΤΖΗΥ και ΥΗΙΞ είναι τοποθετημένα έτσι ώστε να κρατιούνται από τις δεξιές κορυφές τους Ε, Ζ, Η και Ι τότε θα ισορροπούν με τα τραπέζια ΚΒΕΦ, ΛΕΖΘ, ΜΖΗΠ και ΝΗΙΟ αντίστοιχα όταν αυτά κρατιούνται από το Α. Όμως εάν, αντί από αυτά τα σημεία, κρατιούνται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ και ΙΓ τότε θα ισορροπούν με τα Ρ, Χ, Ψ και Ω αντίστοιχα. Δηλαδή, τα εμβαδά Ρ, Χ, Ψ και Ω θα είναι μικρότερα από τα τραπέζια ΚΒΕΦ, ΛΕΖΘ, ΜΖΗΠ και ΝΗΙΟ. Άρα, το άθροισμα των εμβαδών Ρ, Χ, Ψ, Ω και Δ' θα είναι μικρότερο από το άθροισμα των τραπεζίων ΚΒΕΦ, ΛΕΖΘ, ΜΖΗΠ και ΝΗΙΟ και του τριγώνου ΙΞΓ.

Αφού όμως το άθροισμα των εμβαδών Ρ, Χ, Ψ, Ω και Δ' είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ του τριγώνου ΒΓΔ τότε το $\frac{1}{3}$ αυτού του τριγώνου θα είναι μικρότερο από το άθροισμα των τραπεζίων ΚΒΕΦ, ΛΕΖΘ, ΜΖΗΠ και ΝΗΙΟ και του τριγώνου ΙΞΓ έξω από το παραβολικό

χωρίο. Ακολουθώντας την ίδια ακριβώς σκέψη, αποδεικνύει ότι το $\frac{1}{3}$ του τριγώνου ΒΓΔ είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των τραπεζίων ΦΕΖΘ, ΘΖΗΠ, ΠΗΙΟ και του τριγώνου ΙΓΟ, εσωτερικά της παραβολής.

2^H: Με τη μέθοδο της εξάντλησης

Ο Αρχιμήδης με τη μέθοδο της εξάντλησης υπολόγισε τα εμβαδά και τους όγκους διαφόρων σχημάτων και είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι οι βασικές ιδέες του ολοκληρώματος Riemman βασίζονται σε αυτή. Ας περιγράψουμε τη μέθοδο της εξάντλησης η οποία αποτελείται από τρία βήματα. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε ένα εμβαδόν E .

Βήμα 1^ο: Περικλείουμε αυτό το εμβαδό σε γνωστά εμβαδά, ένα μέσα (το εγγεγραμμένο) και ένα έξω (το περιγεγραμμένο). Δηλαδή, κατασκευάζουμε γνωστά εμβαδά $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε $A_n \leq E \leq B_n$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ να υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $B_n - A_n < \varepsilon$.

Βήμα 2^ο: Προσπαθούμε να βρούμε έναν πραγματικό αριθμό α . Δηλαδή σταθεροποιούμε ένα $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει ότι $A_n \leq \alpha \leq B_n$ για κάθε n .

Βήμα 3^ο: Αποδεικνύουμε ότι $E = \alpha$. Από το αξίωμα της τριχοτομίας έχουμε ότι $E < \alpha$ ή $E > \alpha$ ή $E = \alpha$.

- Έστω $E > \alpha$. Τότε θέτουμε $\varepsilon = E - \alpha > 0$. Από το πρώτο βήμα, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $B_n - A_n < \varepsilon$. Συνεπώς $B_n < A_n + \varepsilon$. Από το δεύτερο βήμα, $B_n < A_n + \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon = \alpha + E - \alpha = E$. Δηλαδή, $B_n < E$. Όμως αυτό είναι άτοπο λόγω του πρώτου βήματος.

- Έστω $E < \alpha$. Τότε για $\varepsilon = \alpha - E > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $B_n - A_n < 0$. Συνεπώς, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $-A_n < \varepsilon - B_n$, δηλαδή $A_n > B_n - \varepsilon$. Από το δεύτερο βήμα έχουμε $\alpha \leq B_n$ και $\alpha - \varepsilon \leq B_n - \varepsilon$. Άρα $A_n > \alpha - \varepsilon$ για $\varepsilon = \alpha - E > 0$. Επομένως, $A_n > \alpha - (\alpha - E)$ και $A_n > E$. Όμως αυτό είναι άτοπο λόγω του πρώτου βήματος.

Άρα, θα είναι αναγκαστικά $E = \alpha$.

Ας υποθέσουμε ότι το εμβαδόν του παραβολικού τμήματος το συμβολίζουμε με s και το $\frac{1}{3}$ του τριγώνου $B\Gamma\Delta$ με z . Ο Αρχιμήδης τοποθετεί το s μεταξύ των εμβαδών s_1 και s_2 και αποδεικνύει, χρησιμοποιώντας όπως συνήθιζε έναν από τους μηχανικούς του τρόπους, ότι και το z είναι μεταξύ των δύο αυτών εμβαδών s_1 και s_2 . Για τα εμβαδά αυτά ισχύει ότι η διαφορά τους $s_1 - s_2$ είναι ίση με ένα οσοδήποτε μικρό μέρος του τριγώνου $B\Gamma\Delta$. Δηλαδή ισχύουν οι τρεις παρακάτω σχέσεις:

- 1) $s_1 > s > s_2$
- 2) $s_1 > z > s_2$
- 3) $s_1 - s_2 = \varepsilon$

Έστω ότι το s είναι μεγαλύτερο από το z , δηλαδή έστω ότι $s > z$. Διαλέγουμε ένα ε μικρότερο από την διαφορά $s - z$, δηλαδή $\varepsilon < s - z$.

Τότε ισχύει ότι: $s - z > \varepsilon \Rightarrow$ λόγω της (3)

$$s - z > s_1 - s_2 \Rightarrow$$

$$s > z + (s_1 - s_2) \Rightarrow \text{λόγω της (2)}$$

$$s > s_2 + (s_1 - s_2) \Rightarrow$$

$$s > s_1.$$

Η τελευταία σχέση στην οποία καταλήξαμε έρχεται σε αντίθεση με την σχέση (1) και δεν μπορεί να ισχύει. Άρα, οδηγηθήκαμε σε άτοπο.

Έστω τώρα ότι το s είναι μικρότερο από το z , δηλαδή έστω ότι $s < z$. Διαλέγουμε ένα ε μικρότερο από την διαφορά $s - z$, δηλαδή $\varepsilon < z - s$. Τότε ισχύει ότι: $z - s > \varepsilon \Rightarrow$ (λόγω της 3)

$$z - s > s_1 - s_2 \Rightarrow$$

$$z > s + (s_1 - s_2) \Rightarrow \text{(λόγω της 2)}$$

$$z > s_2 + (s_1 - s_2) \Rightarrow$$

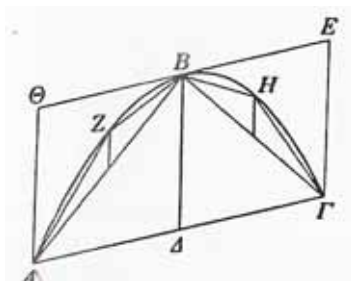
$$z > s_1.$$

Η τελευταία σχέση στην οποία καταλήξαμε έρχεται σε αντίθεση με την σχέση (2) και δεν μπορεί να ισχύει. Άρα, οδηγηθήκαμε σε άτοπο.

Την σκεπτική αυτή, την οποία χρησιμοποιεί συχνά ο Αρχιμήδης, την οφείλουμε στον Εύδοξο. Μάλιστα, μερικές φορές αντικαθιστά τις διαφορές αυτές με λόγους. Εδώ για παράδειγμα, αποδεικνύει ότι ο λόγος $\frac{S_1}{S_2}$ είναι δυνατόν να γίνει μικρότερος από τον λόγο του μεγαλύτερου προς τον μικρότερο δύο οποιωνδήποτε δεδομένων μεγεθών.

3^H: Γεωμετρική:

Η απόδειξη αυτή είναι γεωμετρική¹⁴⁶. Έστω ένα παραβολικό χωρίο ΑΒΓ και έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ. Ο Αρχιμήδης κατασκευάζει μέσα στο χωρίο αυτό ένα τρίγωνο, το ΑΒΓ γράφοντας από το μέσο, έστω Δ, της βάσης του ΑΓ μία ευθεία παράλληλη προς τον άξονα, την ΒΔ (βλ. σχήμα 5). Τώρα, από τα τόξα ΑΒ και ΒΓ ορίζονται δύο παραβολικά χωρία. Στα δύο αυτά χωρία ο Αρχιμήδης γράφει τα τρίγωνα ΑΖΒ και ΒΗΓ αντιστοίχως ακολουθώντας τον ίδιο τρόπο. Δηλαδή, φέρνει τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα και από τα μέσα τους γράφει μία ευθεία στο καθένα παράλληλη προς τον άξονα.



σχήμα 10

Από τις ιδιότητες της παραβολής, τις οποίες εδώ δεν παραθέτει αφού τις θεωρεί γνωστές, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι το άθροισμα των δύο αυτών τριγώνων ισούται με το ένα τέταρτο του αρχικού μας τριγώνου. Δηλαδή ότι: $AZB + BHΓ = \frac{1}{4} ABΓ$. Συνεχίζοντας αυτήν την διαδικασία προκύπτουν τέσσερα τρίγωνα των οποίων το άθροισμα είναι ίσο με το ένα τέταρτο του αθροίσματος των δύο αμέσως προηγούμενων τριγώνων και πάει λέγοντας.

Έστω το ΑΒΓ τρίγωνο είναι ίσο με το μισό του περιγεγραμμένου παραλληλογράμμου ΑΓΕΘ και επομένως είναι μεγαλύτερο από το μισό του παραβολικού χωρίου ΑΒΓ. Ο συλλογισμός τον οποίο ακολουθεί ο Αρχιμήδης είναι ο εξής: εάν από το παραβολικό αυτό χωρίο αφαιρέσουμε αρχικά το τρίγωνο ΑΒΓ (το οποίο είναι μεγαλύτερο από το μισό) και στη συνέχεια από τα δύο χωρία που απομείνανε εάν αφαιρέσουμε τα τρίγωνα ΑΖΒ και ΒΗΓ (τα οποία είναι και αυτά μεγαλύτερα από το μισό) και εάν η

¹⁴⁶ Γιάννης Χριστιανίδης, 'Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών', Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2003, σελίς 143.

διαδικασία αυτή συνεχίζεται¹⁴⁷, τότε στο τέλος θα μείνει λιγότερο από οποιοδήποτε δεδομένο εμβαδόν.

¹⁴⁷ 'Στοιχεία' του Ευκλείδη, Βιβλίο 10, Πρόταση Ι: «Δοθέντων δύο άνισων μεγεθών, εάν από του μεγαλύτερον αφαιρεθεί μεγαλύτερο του μισού και από του υπολοίπου μεγαλύτερο του μισού και τούτο γίνεται πάντοτε, θα απομείνει ένα μέγεθος το οποίο θα είναι μικρότερο του αρχικού μικρότερου μεγέθους».

3.9 Έφοδος

Η πραγματεία αυτή του Αρχιμήδη, η οποία σώθηκε ελλιπής¹⁴⁸, περιλαμβάνει 15 θεωρήματα και παρόμοιες αποδείξεις για κωνοειδή, σφαιροειδή καθώς και για την εύρεση του κέντρου βάρους αυτών. Όμως, την σπουδαιότητα του έργου αυτού σηματοδοτεί η ύπαρξη της μεθόδου την οποία χρησιμοποίησε ο Αρχιμήδης για να βρει το εμβαδόν ενός παραβολικού χωρίου, όπου παρέχεται σαφής εικόνα της χρησιμοποίησης του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Η «Έφοδος» είναι το μοναδικό έργο στο οποίο γίνεται περιγραφή της μεθόδου η οποία χρησιμοποιήθηκε και σ' αυτό το σημείο αποτελεί μεγάλη εξαίρεση από τις υπόλοιπες πραγματείες. Σύνηθες φαινόμενο ως τότε αποτελούσε η απόκρυψη της αναλυτικής μεθόδου που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι Έλληνες από τους μεταγενέστερους μαθηματικούς.

Πιο συγκεκριμένα, ο Αρχιμήδης¹⁴⁹ στην πραγματεία του αυτή περιγράφει πως ανακάλυψε θεωρήματα εύρεσης εμβαδών και όγκων, κάνοντας χρήση της μηχανικής. Δηλαδή συγκρίνοντας στοιχεία του σχήματος εκείνου του οποίου ήθελε να υπολογίσει το εμβαδόν ή όγκο με στοιχεία ενός άλλου πιο απλού σχήματος που ήδη γνώριζε.

Η πραγματεία αυτή, την οποία συναντάμε και με το όνομα «Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος» ή «Μέθοδος» περιλαμβάνει τις αποδείξεις για:

- Το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου.
- Τον όγκο της σφαίρας.
- Τον όγκο ενός σφαιροειδούς.
- Τον όγκο τμήματος ενός παραβολοειδούς εκ περιστροφής.
- Το κέντρο βάρους τμήματος ενός παραβολοειδούς εκ περιστροφής, αποτεμνομένου από επίπεδο κάθετο άξονα.
- Το κέντρο βάρους ημισφαιρίου.

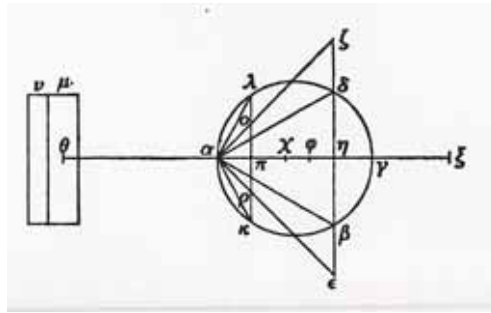
¹⁴⁸ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α, σελίς 21.

¹⁴⁹ B.L. Van Der Waerden, 'Η αφύπνιση της επιστήμης', Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000, σελίς 250.

- Τον όγκο ενός σφαιρικού τμήματος.
- Τον όγκο ενός τμήματος ενός σφαιροειδούς.
- Το κέντρο βάρους ενός σφαιρικού τμήματος.
- Το κέντρο βάρους τμήματος ενός σφαιροειδούς.
- Το κέντρο βάρους τμήματος ενός υπερβολοειδούς εκ περιστροφής.
- Τον όγκο τμήματος ενός κυλινδρικού χωρίου.
- Τον όγκο της τομής δύο κυλίνδρων.

Στο ένατο θεώρημα ο Αρχιμήδης αποδεικνύει πως βρίσκεται το κέντρο βάρους ενός τμήματος από ένα μέγεθος, όταν δίνονται τα κέντρα βάρους του άλλου τμήματος και ολόκληρου του μεγέθους. Όπως γράφει χαρακτηριστικά: *«Σε κάθε σφαιρικό τμήμα το κέντρο βάρους κείται επί του άξονα του τμήματος στο σημείο που διαιρεί τον άξονα έτσι ώστε το μέρος προς την κορυφή του τμήματος προς το υπόλοιπο να έχει λόγο ίσο με τον λόγο του αθροίσματος του άξονα του τμήματος συν το τετραπλάσιο του άξονα του απέναντι τμήματος προς το άθροισμα του άξονα του τμήματος συν το διπλάσιο του άξονα του απέναντι τμήματος».*

Έστω σφαίρα από την οποία επίπεδο έχει αποκόψει ένα σφαιρικό τμήμα και έστω ότι η τομή της σφαίρας από ένα άλλο επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της είναι ο κύκλος ΑΒΓΔ. Έστω ΒΔ η τομή των δύο επιπέδων μεταξύ τους, ΓΑ η κάθετη διάμετρος στη ΒΔ και Η το σημείο τομής της ΓΑ και της ΒΔ. Το σφαιρικό τμήμα με κορυφή το Α θα έχει άξονα την ΑΗ και το απέναντι τμήμα την ΗΓ. Τέμνουμε την ΑΗ στο σημείο Χ, έτσι ώστε ο λόγος της ΑΧ προς τη ΧΗ να ισούται με τον λόγο του αθροίσματος της ΑΗ συν το τετραπλάσιο της ΗΓ προς το άθροισμα της ΑΗ συν το διπλάσιο της ΗΓ. Θεωρώ ότι το κέντρο βάρους του τμήματος με κορυφή το Α είναι το σημείο Χ.



σχήμα 11

Προεκτείνω την ΑΓ και προς τα δύο μέρη και παίρνω επί της μιας προέκτασης τμήμα ΑΘ ίσο με την ΑΓ και επί της άλλης τμήμα ΓΞ ίσο με την ακτίνα της σφαίρας και θεωρώ τη ΓΘ ως ζυγό με μέσον το σημείο Α. Έστω τώρα ότι στο επίπεδο που αποτελεί το τμήμα γράφουμε κύκλο με κέντρο το Η και ακτίνα ίση με την ΑΗ. Από τον κύκλο αυτό γράφουμε κώνο με κορυφή το σημείο Α και πλευρές τις ΑΕ και ΑΖ. Φέρνουμε μια παράλληλη προς την ΕΖ, έστω την ΚΛ, η οποία τέμνει την περιφέρεια του τμήματος στα σημεία Κ και Λ, τις πλευρές του κώνου ΑΕΖ στα σημεία Ρ και Ο και την ΑΓ στο σημείο Π. Επειδή τώρα ο λόγος της ΑΓ προς την ΑΠ ισούται με τον λόγο του τετραγώνου της ΚΑ προς το τετράγωνο της ΑΠ και επειδή το τετράγωνο της ΚΑ ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΠ και ΠΚ, ενώ το τετράγωνο της ΑΠ ισούται με το τετράγωνο της ΠΟ και επειδή το τετράγωνο της ΑΗ ισούται με το τετράγωνο της ΕΗ, συνεπάγεται ότι ο λόγος της ΓΑ προς την ΑΠ ισούται με τον λόγο του αθροίσματος των τετραγώνων των ΚΠ και ΠΟ προς το τετράγωνο της ΟΠ.

Αλλά όποιο λόγο έχει το άθροισμα των τετραγώνων ΚΠ και ΠΟ προς το τετράγωνο της ΠΟ έχει και ο κύκλος με διάμετρο την ΚΛ συν τον κύκλο με διάμετρο την ΟΡ προς τον κύκλο με διάμετρο την ΟΡ, ενώ η ΓΑ είναι ίση με την ΑΘ. Επομένως συνεπάγεται ότι ο λόγος της ΘΑ προς την ΑΠ ισούται με τον λόγο του αθροίσματος των κύκλων με διαμέτρους τις ΚΛ και ΟΡ προς τον κύκλο με διάμετρο την ΟΡ. Επειδή λοιπόν όποιο λόγο έχουν οι δύο κύκλοι που έχουν διαμέτρους τις ΚΛ και ΟΡ προς τον κύκλο που έχει διάμετρο την ΟΡ έχει και η ΑΘ προς την ΠΑ, μετατοπίζουμε τον κύκλο με διάμετρο την ΟΡ και τον θέτουμε επί του ζυγού στο σημείο Θ, έτσι ώστε το Θ να είναι το κέντρο βάρους του. Άρα, όποιο λόγο έχει η ΘΑ προς την ΑΠ έχουν και οι κύκλοι με διαμέτρους τις ΚΛ και ΟΡ μένοντας στη θέση τους προς το κύκλο με διάμετρο την ΟΡ που έχει μεταφερθεί και τεθεί επί του ζυγού στο σημείο Θ έτσι ώστε το κέντρο βάρους του να είναι το σημείο Θ. Επομένως οι δύο κύκλοι, ο ένας επί του σφαιρικού τμήματος ΒΑΔ και ο άλλος επί του κώνου ΑΕΖ ισορροπούν τον κύκλο επί του κώνου ΑΕΖ ως προς το σημείο Α.

Με τον ίδιο τρόπο, όλοι οι κύκλοι επί του τμήματος ΒΑΔ και επί του κώνου ΑΕΖ μένοντας στη θέση τους θα ισορροπούν όλους τους κύκλους επί του κώνου ΑΕΖ που έχουν μεταφερθεί και τοποθετηθεί επί του σημείου Θ του ζυγού, έτσι ώστε το κέντρο βάρους τους να είναι το Θ. Συνεπώς το σφαιρικό τμήμα ΑΒΔ μαζί με τον κώνο ΑΕΖ μένοντας στη θέση τους θα ισορροπούν ως προς το σημείο Α τον κώνο ΕΑΖ που θα έχει μεταφερθεί και τοποθετηθεί επί του ζυγού στο σημείο Θ, έτσι ώστε το Θ να είναι το κέντρο βάρους του.

Έστω τώρα κύλινδρος ΜΝ ίσος με τον κώνο που έχει βάση τον κύκλο διαμέτρου ΕΖ και κορυφή το σημείο Α. Έστω, επίσης, ότι διαιρούμε την ΑΗ στο σημείο Φ, έτσι ώστε η ΑΗ να είναι τετραπλάσια της ΦΗ. Συνεπώς, το σημείο Φ είναι το κέντρο βάρους του κώνου ΕΑΖ. Τέμνουμε τώρα τον κύλινδρο ΜΝ κάθετα με επίπεδο, έτσι ώστε ο κύλινδρος Μ να ισορροπεί τον κώνο ΕΑΖ. Επειδή ο κώνος ΕΑΖ και το τμήμα ΑΒΔ μένοντας στη θέση τους ισορροπούν τον κώνο ΕΑΖ (ο οποίος έχει μεταφερθεί και τεθεί επί του ζυγού στο σημείο Θ έτσι ώστε το σημείο Θ να είναι το κέντρο βάρους του), και επειδή ο κύλινδρος ΜΝ είναι ίσος με τον κώνο ΕΑΖ, ενώ ο καθένας από τους κυλίνδρους Μ και Ν κείται στο σημείο Θ και επιπλέον επειδή ο κύλινδρος ΜΝ ισορροπεί το σφαιρικό τμήμα και τον κώνο, συνεπάγεται ότι ο κύλινδρος Ν θα ισορροπεί το σφαιρικό τμήμα ως προς το σημείο Α. Εξάλλου, όποιο λόγο έχει το σφαιρικό τμήμα ΒΑΔ προς τον κώνο που έχει βάση τον κύκλο διαμέτρου ΒΔ και κορυφή το σημείο Α έχει και η ΞΗ προς την ΗΓ. Αλλά όποιο λόγο έχει ο κώνος ΒΑΔ προς τον κώνο ΕΑΖ τον ίδιο έχει και ο κύκλος με διάμετρο τη ΒΔ προς τον κύκλο με διάμετρο την ΕΖ και ο λόγος αυτός των δυο κύκλων είναι και λόγος του τετραγώνου της ΒΗ προς το τετράγωνο της ΗΕ.

Επίσης, το τετράγωνο της ΒΗ ισούται με το ορθογώνιο πλευρών ΓΗ και ΗΑ, ενώ το τετράγωνο της ΗΕ με το τετράγωνο της ΗΑ, και ο λόγος του ορθογωνίου πλευρών ΓΗ και ΗΑ προς το τετράγωνο της ΗΑ ισούται με τον λόγο της ΓΗ προς την ΗΑ. Άρα, όποιο λόγο έχει ο κώνος ΒΑΔ προς τον κώνο ΕΑΖ τον ίδιο έχει και η ΓΗ προς την ΗΑ. Έχει όμως αποδειχτεί ότι όποιο λόγο έχει ο κώνος ΒΑΔ προς το σφαιρικό τμήμα ΒΑΔ έχει και η ΓΗ προς την ΗΞ. Άρα από την αναλογία προκύπτει ότι όποιο λόγο έχει το τμήμα ΒΑΔ προς τον κώνο ΕΑΖ, τον ίδιο έχει και η ΞΗ προς την ΗΑ. Επειδή τώρα όποιο λόγο έχει η ΑΧ προς τη ΧΗ έχει και η ΗΑ συν το τετραπλάσιο της ΗΓ προς την ΑΗ συν το διπλάσιο της ΗΓ, με αντιστροφή προκύπτει ότι ο λόγος της ΗΧ προς τη ΧΑ ισούται με το διπλάσιο της ΓΗ συν την ΗΑ προς το τετραπλάσιο της ΓΗ συν την ΗΑ. Με πρόσθεση των παρονομαστών στους αριθμητές προκύπτει ότι ο λόγος της ΗΑ προς την ΑΧ ισούται με το εξαπλάσιο της ΓΗ συν το διπλάσιο της ΗΑ προς την ΑΗ συν το τετραπλάσιο της ΗΓ. Αλλά η ΗΞ ισούται με το ένα τέταρτο του αθροίσματος του εξαπλάσιου της ΗΓ συν το διπλάσιο της ΗΑ και η ΓΦ με το

ένα τέταρτο του αθροίσματος του τετραπλάσιου της ΗΓ συν την ΗΑ. Άρα, ο λόγος της ΗΑ προς την ΑΧ ισούται με τον λόγο της ΞΗ προς τη ΓΦ. Επομένως, όποιο λόγο έχει η ΞΗ προς την ΗΑ έχει και η ΓΦ προς τη ΧΑ. Αποδείχτηκε όμως ότι όποιο λόγο έχει η ΞΗ προς την ΗΑ έχει και το σφαιρικό τμήμα με κορυφή το σημείο Α και βάση τον κύκλο διαμέτρου ΒΔ προς τον κώνο με κορυφή το σημείο Α και βάση τον κύκλο διαμέτρου ΕΖ. Επομένως, όποιο λόγο έχει το τμήμα ΒΑΔ προς τον κώνο ΕΑΖ έχει και η ΓΦ προς τη ΧΑ. Και επειδή ο κύλινδρος Μ ισορροπεί τον κώνο ΕΑΖ ως προς το σημείο Α, ενώ το κέντρο βάρους του κυλίνδρου είναι το σημείο Θ και του κώνου το σημείο Φ, έπεται ότι όποιο λόγο έχει ο κώνος ΕΑΖ προς τον κύλινδρο Μ τον ίδιο θα έχει και η ΘΑ προς την ΑΦ, δηλαδή η ΓΑ προς την ΑΦ.

Επί πλέον, ο κώνος ΕΑΖ είναι ίσος με τον κύλινδρο ΜΝ. Επομένως, με αφαίρεση των παρονομαστών από τους αριθμητές προκύπτει ότι όποιο λόγο έχει ο κύλινδρος ΜΝ προς τον κύλινδρο Ν έχει και η ΑΓ προς την ΓΦ. Αλλά ο κύλινδρος ΜΝ είναι ίσος με τον κώνο ΕΑΖ, επομένως όποιο λόγο έχει ο κώνος ΕΑΖ προς τον κύλινδρο Ν έχει και η ΓΑ προς τη ΓΦ, δηλαδή η ΘΑ προς τη ΓΦ. Αλλά αποδείχτηκε ότι όποιο λόγο έχει το τμήμα ΒΑΔ προς τον κώνο ΕΑΖ έχει και η ΓΦ προς τη ΧΑ. Άρα, με πολλαπλασιασμό κατά μέλη προκύπτει ότι όποιο λόγο έχει το τμήμα ΑΒΔ προς τον κύλινδρο Ν έχει και η ΘΑ προς την ΑΧ. Αποδείχτηκε επίσης, ότι το τμήμα ΒΑΔ ισορροπεί τον κύλινδρο Ν ως προς το σημείο Α, ενώ το κέντρο βάρους του κυλίνδρου είναι το σημείο Θ. Άρα, το κέντρο βάρους του τμήματος ΒΑΔ είναι το σημείο Χ.

Όσον αφορά στον όγκο του σφαιροειδούς ο Αρχιμήδης χρησιμοποιώντας την μηχανική του μέθοδο βρίσκει ότι ένα σφαιροειδές, όπως είναι το ελλειψοειδές εκ περιστροφής, έχει όγκο ίσο με τα $\frac{2}{3}$ του όγκου του περιγεγραμμένου κυλίνδρου. Για το παραβολοειδές εκ περιστροφής το οποίο το τέμνει επίπεδο κάθετο στον άξονα ο Αρχιμήδης αποδεικνύει, με τον ίδιο πάλι τρόπο όπως προηγουμένως, ότι ο όγκος του οριοθετημένου χωρίου είναι το $1 \frac{1}{2}$ του κώνου από την ίδια βάση και τον ίδιο άξονα.

Τέλος, σχετικά με τους κυλίνδρους ο Αρχιμήδης παραθέτει δύο προτάσεις τις οποίες και αποδεικνύει. Η πρώτη από αυτές είναι η παρακάτω¹⁵⁰: «Έστω ένας κύλινδρος κατασκευασμένος σε ένα ορθό πρίσμα του οποίου η βάση είναι τετράγωνο. Η βάση του κυλίνδρου είναι ο εγγεγραμμένος στη βάση του κύκλος. Έστω ένα επίπεδο το οποίο διέρχεται από το κέντρο της βάσης και από μία ακμή της επάνω βάσης. Τότε ο όγκος του κυλινδρικού

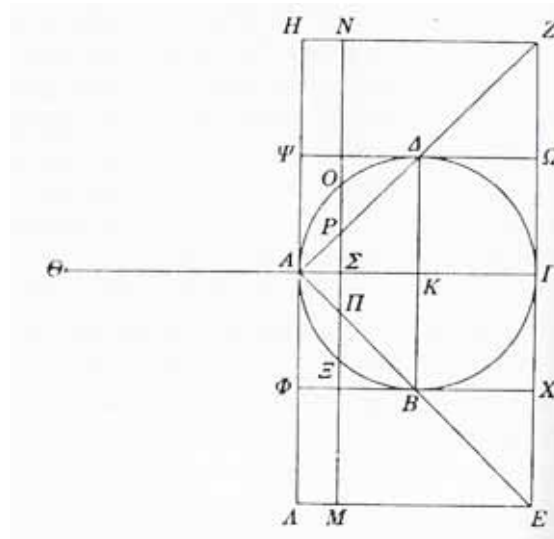
¹⁵⁰ B.L. Van Der Waerden, 'Η αφύπνιση της επιστήμης', Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000, σελίς 254.

τμήματος που περικλείεται από την κυλινδρική επιφάνεια, το πλάγιο επίπεδο και την βάση είναι ίσο με το $\frac{1}{6}$ του όλου πρίσματος.» Η δεύτερη από αυτές τις προτάσεις είναι η εξής: «Αν μέσα σε έναν κύβο κατασκευαστούν δύο κύλινδροι, των οποίων οι άξονες είναι κάθετοι μεταξύ τους, τότε ο όγκος του στερεού που είναι κοινό σε αυτούς τους κυλίνδρους είναι ίσος με τα $\frac{2}{3}$ του όγκου του κύβου.» Η απόδειξη όμως αυτής της πρότασης δεν βρέθηκε στο παλίμψηστο.

Η απόδειξη που ακολουθεί είναι ίσως η σημαντικότερη της πραγματείας αυτής του Αρχιμήδη, διότι αποτελεί ένα παράδειγμα μέσω του οποίου γίνεται κατανοητός ο μηχανικός τρόπος που συνήθιζε να χρησιμοποιεί.

Όγκος σφαίρας

Έστω ΑΒΓΔ ένας μέγιστος κύκλος της σφαίρας. Ας θεωρήσουμε έναν άλλο μέγιστο κύκλο ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ (βλ. σχήμα 12). Ο κύκλος αυτός βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο προς το επίπεδο στον οποίο βρίσκεται ο αρχικός μας κύκλος ΑΒΓΔ. Επιπλέον, θεωρούμε έναν κώνο ο οποίος έχει την κορυφή του στο σημείο Α και άξονα το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ. Βάση του κώνου αυτού είναι ένας νέος κύκλος με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ. Αυτός ο τελευταίος κύκλος αποτελεί την βάση του κυλίνδρου ΕΖΗΛ που έχει ως άξονα το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ.



σχήμα 12

Έστω μία τυχαία ευθεία παράλληλη στην ευθεία ΒΔ, η ΜΣΝ. Αν η ευθεία αυτή τέμνει τον κύκλο ΑΒΓΔ στα σημεία Ο και Ξ, και στα σημεία Π και Ρ τέμνει την επιφάνεια του κώνου, τότε ισχύει ότι:

$$\Sigma P^2 + \Sigma O^2 = \Sigma A^2 + \Sigma O^2$$

$$\Sigma P^2 + \Sigma O^2 = \Sigma A^2 = \Sigma A \times \Sigma \Gamma \text{ και}$$

$$\frac{\Sigma P \cdot \Sigma P + \Sigma O \cdot \Sigma O}{\Sigma N \cdot \Sigma N} = \frac{\Sigma A \cdot \Sigma \Gamma}{\Sigma \Gamma \cdot \Sigma \Gamma} = \frac{\Sigma A}{\Sigma \Gamma}.$$

Στη συνέχεια, ο Αρχιμήδης¹⁵¹ θεωρεί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ ως βραχίονα μοχλού που έχει υπομόχλιο στο σημείο Α. Τώρα, παίρνει ευθύγραμμο τμήμα ΑΘ προεκτείνοντας την ευθεία ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΘ = ΑΓ και στο σημείο Θ αυτού του βραχίονα

¹⁵¹ B.L. Van Der Waerden, 'Η αφύπνιση της επιστήμης', Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000, σελίς 252.

μεταφέρει τους δύο κύκλους με διαμέτρους ΠΡ και ΞΟ αντίστοιχα. Εκεί οι κύκλοι αυτοί θα ισορροπούν με τον κύκλο ο οποίος έχει διάμετρο ΜΝ και κέντρο το σημείο Σ. Συνέπεια αυτής της ισορροπίας αποτελεί η ισορροπία του κυλίνδρου ΕΖΗΛ στην θέση που βρίσκεται με την σφαίρα και τον κώνο ως ένα όταν βρίσκονται στο άκρο του βραχίονα, δηλαδή στο Θ. Αυτό συμβαίνει επειδή ο κύλινδρος αποτελείται από αυτούς τους δύο κύκλους.

Έστω τώρα Κ το κέντρο βάρους του κυλίνδρου. Ο λόγος του κυλίνδρου προς το άθροισμα της σφαίρας και του κώνου μαζί θα είναι ίσος με τον λόγο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΘ προς το ΑΚ που ισούται με $\frac{2}{1}$. Από αυτήν την αναλογία συμπεράνουμε ότι η σφαίρα με τον κώνο μαζί είναι ίσα με το μισό του κυλίνδρου. Και σύμφωνα με την πληροφορία που μας παρέχει ο Εύδοξος¹⁵², ότι ο κώνος είναι ίσος με το $\frac{1}{3}$ του κυλίνδρου, η σφαίρα θα είναι ίση με τα $\frac{2}{3}$ του μικρού κυλίνδρου ΦΧΨΩ.

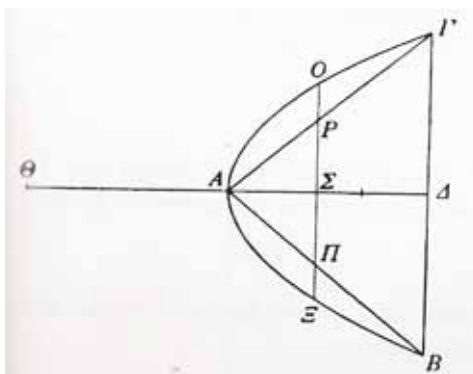
¹⁵² B.L. Van Der Waerden, *‘Η αφύπνιση της επιστήμης’*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000, σελίς 252.

Κέντρο βάρους τμήματος ενός παραβολοειδούς εκ περιστροφής αποτεμνόμενου από επίπεδο κάθετο άξονα

Έστω ένας κώνος πάνω στο παραβολοειδές, (βλ. σχήμα 8) ο ΑΒΓ με την κορυφή του στο σημείο Α και άξονα το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ. Ο Αρχιμήδης προεκτείνει την ΑΔ και παίρνει σημείο πάνω σε αυτήν το Θ, τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΘ. Στην συνέχεια, θεωρεί ως μοχλό το ευθύγραμμο τμήμα ΘΔ με υπομόχλιο στο Α και παίρνει μία ευθεία

παράλληλη στην ΒΓ, την ΟΞ και βρίσκει ότι $\frac{\Sigma\text{Ο} \cdot \Sigma\text{Ο}}{\Sigma\text{Ρ} \cdot \Sigma\text{Ρ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΣ}}$.

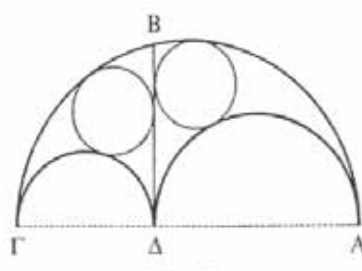
Αρα, ο κύκλος με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΟΞ θα ισορροπεί στην θέση που βρίσκεται με τον κύκλο διαμέτρου ΡΠ αν ο δεύτερος μεταφερθεί στο σημείο Θ. Δηλαδή, το τμήμα του παραβολοειδούς στην θέση όπου βρίσκεται θα ισορροπεί με τον κώνο αν τοποθετηθεί στο σημείο Θ. Και αφού το βάρος αυτού του τμήματος είναι ίσο με τα $\frac{3}{2}$ του βάρους του κώνου, τότε ο λόγος των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΘ προς ΑΚ θα είναι και αυτός $\frac{3}{2}$.



σχήμα 13

3.10 Βιβλίο Λημμάτων

Το «βιβλίο των λημμάτων» σώζεται μόνο στα Αραβικά. Περιέχει 15 θεωρήματα¹⁵³ επιπεδομετρίας και ξεκινάει με ένα σύνολο προτάσεων που αφορούν τον λεγόμενο «*Αρβηλο*» ή διαφορετικά «*το μαχαίρι του τσαγκάρη*». Πρόκειται για ένα σχήμα που ορίζεται από τρία ημικύκλια τα οποία εφάπτονται μεταξύ τους στα άκρα τους. Ο «*άρβηλος*»¹⁵⁴ έχει το ίδιο εμβαδόν με τον κύκλο ο οποίος έχει διάμετρο τη ΒΔ (βλ. σχήμα 14). Η ευθεία αυτή, η ΒΔ, χωρίζει τον «*άρβηλο*» σε δύο τμήματα, των οποίων οι εγγεγραμμένοι κύκλοι είναι ίσοι.



σχήμα 14

Μία από αυτές τις προτάσεις, σχετική με το σχήμα «*Αρβηλος*», είναι η επόμενη¹⁵⁵: «*Εστω τα ημικύκλια ΓΔ, ΔΑ και ΓΑ. Εάν ένας κύκλος είναι εγγεγραμμένος στο σχήμα αυτό και εφάπτεται στα τρία ημικύκλια τότε αν δίνεται η αναλογία του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ΔΑ, μπορεί να βρεθεί η σχέση μεταξύ της διαμέτρου του περιγεγραμμένου στον άρβηλο κύκλου και του ευθύγραμμου τμήματος ΓΑ*». Η απόδειξη για την ειδική περίπτωση κατά την οποία ισχύει ότι $\Gamma\Delta = \frac{3}{2} \text{ΒΔ}$ υποστηρίζει ότι η διάμετρος του εγγεγραμμένου κύκλου είναι ίση με τα $\frac{6}{19}$ του ΓΑ.

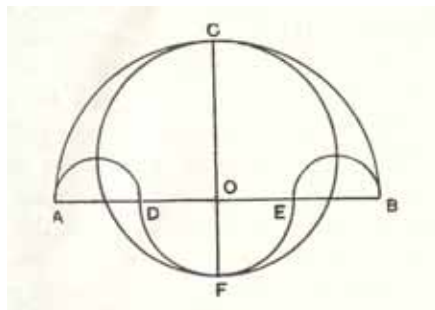
Επιπλέον, το έργο αυτό του Αρχιμήδη περιέχει και ένα άλλο σχήμα, το λεγόμενο «*Σαληνόν*» (βλ. σχήμα 15) που σημαίνει αλατιέρα. Μία πρόταση ου αφορά στο σχήμα αυτό είναι η παρακάτω: «*Εστω ACB ημικύκλιο με διάμετρο την AB και έστω AD και EB ίσα μήκη με αρχή το A και το B, αντίστοιχα. Με διαμέτρους τα ευθύγραμμα τμήματα AD και EB γράφουμε ημικύκλια προς την πλευρά του C, ενώ προς την αντίθετη πλευρά σχεδιάζουμε ημικύκλιο με διάμετρο το DE. Φέρνουμε την κάθετη CF στο ευθύγραμμο τμήμα*

¹⁵³ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α, σελίς 21.

¹⁵⁴ B.L. Van Der Waerden, 'Η αφύπνιση της επιστήμης', Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000, σελίς 264.

¹⁵⁵ Sir Thomas Heath, 'A History of Greek Mathematics', Volume II, From Aristarchus to Diophantus, Dover Publications.

AB η οποία περνάει από το κέντρο O του ημικυκλίου ACB με διάμετρο την AB. Τότε το εμβαδόν του σχήματος που περικλείεται από τα τρία αυτά ημικύκλια είναι ίσο με το εμβαδόν του κύκλου ο οποίος έχει ως διάμετρο την CF.»



σχήμα 15

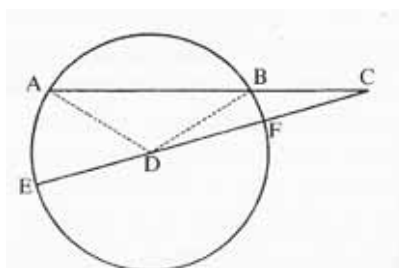
Ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα το οποίο περιλαμβάνει το βιβλίο αφορά την τριχοτόμηση οξείας γωνίας με τη βοήθεια της κινητικής γεωμετρίας και αυτό είναι το εξής : *‘Να προεκταθεί μια χορδή AB ενός κύκλου κατά τμήμα BC ίσο με την ακτίνα, και να αχθεί η διάμετρος FDE από το C. Τότε το τόξο AE είναι τριπλάσιο από το τόξο BF.’* Η απόδειξη έχει ως εξής¹⁵⁶: Φέρουμε τη CD που τέμνει τον κύκλο στα σημεία F και E (βλ. σχήμα 16). Τότε το τόξο BF θα ισούται με το $\frac{1}{3}$ του τόξου AE. Πράγματι:

$$\angle ADE = \angle DAB + \angle ACD \Rightarrow$$

$$\angle ADE = \angle ABD + \angle BDC \Rightarrow$$

$$\angle ADE = 2 \angle BDC + \angle BDC \Rightarrow$$

$$\angle ADE = 3 \angle BDC.$$



σχήμα 16

¹⁵⁶ B.L. Van Der Waerden, *‘Η αφύπνιση της επιστήμης’*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000, σελίς 266.

Η γεωμετρική ερμηνεία αυτής της πρότασης είναι η τριχοτόμηση ενός συγκεκριμένου τόξου. Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν αρκετά συχνά τέτοιες γεωμετρικές κατασκευές τις οποίες ονόμαζαν «κατασκευές νεύσεως». Αυτό που κατάφερναν με τη νέυση είναι να τοποθετούν ένα ευθύγραμμο τμήμα συγκεκριμένου μήκους μεταξύ δύο γραμμών έτσι ώστε η προέκτασή του να περνά από ορισμένο σημείο.

3.11 Το βοεϊκό πρόβλημα του Αρχιμήδη

Το πρόβλημα αυτό έφερε στο φως ο Γερμανός φιλόλογος, φιλόσοφος, συγγραφέας, θεατρικός κριτικός και μέγας Ελληνολάτρης G.E. Lessing (1729-1781) όταν το 1769 ανακάλυψε ένα βυζαντινό χειρόγραφο του 14^{ου} αιώνα το οποίο περιείχε 4 άγνωστα ποιήματα της Παλατινής Ανθολογίας.¹⁵⁷ Σήμερα, το χειρόγραφο αυτό βρίσκεται στη βιβλιοθήκη του Wolfenbittel της βόρειας Γερμανίας καταχωρημένο με τον κωδικό G77.

Στο Παρίσι εντοπίστηκε και δεύτερο παρόμοιο χειρόγραφο με μία όμως διαφορά. Δεν περιέχει το σχόλιο του πρώτου χειρογράφου (έχει καταχωρισθεί με τον κωδικό P2448). Ενώ τα δύο αυτά χειρόγραφα, όπως αναμέναμε, έχουν ορισμένες μικροδιαφορές ευτυχώς, δεν επηρεάζουν την κατάσταση των εξισώσεων που περιέχουν.

Το σημαντικότερο από τα 4 ποιήματα του χειρογράφου που ανακάλυψε και δημοσίευσε ο Gotthold Ephraim Lessing (1792 - 1781) είναι αυτό του Αρχιμήδη. Πρόκειται για πρόβλημα απροσδιορίστου αναλύσεως. Είναι γραμμένο στην Ιωνική διάλεκτο, ακολουθεί ελεγειακό μέτρο και αποτελείται από 22 δίστιχα (ένα εξάμετρο και ένα πεντάμετρο). Ο Αρχιμήδης πρότεινε το αριθμητικό αυτό πρόβλημα με επιστολή του προς τον Ερατοσθένη και του ζήτησε την «πληθύν *Ηελίοιο βοων*», δηλαδή το πλήθος των βοών του θεού Ήλιου που σύμφωνα με τον ποιητή Όμηρο Μπεκέ έβοσκαν στο νησί Θρηνακία. Από το γεγονός αυτό έμεινε γνωστό στην Ιστορία ως «*Βοεϊκό πρόβλημα*».

Σύμφωνα με την παράδοση που επιβίωσε στα χρόνια του Αρχιμήδη, τα βόδια αυτά έβοσκαν στη σικελική πόλη Ταορμίνα, περίπου 85 χιλιόμετρα βόρεια των Συρακουσών. Στο ποίημα ο Αρχιμήδης ονομάζει τη Σικελία «*Θρινάκιο νησί*», που σημαίνει το νησί που έχει τρεις γωνίες.



¹⁵⁷ Ανακοίνωσε την ανακάλυψή του στο *Beitrage zur Gesch. und Litteratur*, Braunschweig, 1773, σελ.421. Η ανακοίνωση επαναδημοσιεύτηκε στα 'Απαντά' του, *Samtliche Schriften*, τόμος 12, Λειψία 1897.

Το πρόβλημα σε ελεύθερη μετάφραση:

«Ξένε μου, αν είσαι σοφός και ο νους σου κατεβάζει, προσεκτικά υπολόγισε πόσα τα βόδια του
Ηλίου που βόσκανε σε τέσσερα κοπάδια μοιρασμένα στους κάμπους τους Σικελικούς της νήσου
Θρινακίας...

Καθένα από τα κοπάδια αυτά είχε δικό του χρώμα.

Το πρώτο άσπρο ήτανε, κατάλευκο σαν γάλα

το δεύτερο σκουρόχρωμο,

το άλλο ξανθό και το άλλο είχε διάφορα.

Και μέσα στα κοπάδια ήτανε ταύροι αμέτρητοι και καταμερισμένοι.

Στοχάσου ξένε για να βρεις στο πρόβλημα τη λύση:

Των ταύρων των λευκότριχων θέλεις να βρεις το πλήθος.

Πάρε από τους σκούρους τους μισούς, το τρίτο τους και βάλε και όλους τους ταύρους τους
ξανθούς και όλους πρόσθεσέ τους...

Αν τώρα των μαυριδερών θέλεις να βρεις το πλήθος, πάρε από τους πολύχρωμους το τέταρτο,
το πέμπτο, μαζί με όλους τους ξανθούς, κι αμέσως πρόσθεσέ τους...

Για να βρεις τους πολύχρωμους που μένουνε θυμήσου, να πάρεις το έκτο, το έβδομο των
άσπρων και ακόμη πάρε τους ταύρους τους ξανθούς και πρόσθεσέ τους όλους.

Τις γελάδες για να βρεις σκέψου τα παρακάτω:

Πρώτα για να βρεις τις λευκές τις αγελάδες πάρε το τρίτο και το τέταρτο του κοπαδιού των
σκούρων.

Όλες τις σκούρες για να βρεις, που βόσκουν με τους ταύρους, πάρε από τις πολύχρωμες το
τέταρτο και πέμπτο.

Για να βρεις τις πολύχρωμες τις αγελάδες πάρε από το κοπάδι το ξανθό το πέμπτο και το έκτο.

Για να μετρήσεις τις ξανθές σκέψου πως ήταν τόσες όσο του τρίτου το μισό και το έβδομο
ακόμη αυτών του άσπρου κοπαδιού.

Αν λογαριάσεις ακριβώς χώρια το κάθε χρώμα τους, τους σαρκωμένους ταύρους μα και τις
αγελάδες τους, χώρια το κάθε χρώμα, θα 'σαι σοφός και όχι άσχετος στων αριθμών την
τέχνη...

Πρόσεξε όσα θα σου πω για του Ηλίου τους ταύρους:

Οι ταύροι οι λευκότριχοι σαν πήγαιναν και σμίγαν μαζί με τους μαυριδερούς τους ταύρους όλοι
αντάμα, γινόντουσαν ισόμετροι στο μάκρος και στο πλάτος, τετράγωνο σχημάτιζαν στην
Θρινακίας τους κάμπους...

Κι οι ταύροι οι πολύχρωμοι με τους ξανθούς παρέα σχημάτιζαν σαν στέκονταν τριγωνικό ένα σχήμα και λιγοστεύαν βαθμηδόν και φτάνανε στον ένα, χωρίς μαζί να βρίσκονται ταύροι με άλλο χρώμα κι ούτε από τους ταύρους μας αυτούς κανέναν τους να λείπει....

Αν λογαριάσεις ξένε μου των κοπαδιών τα πλήθη, μπορεί να 'σαι περήφανος κι όπου κι αν πας να ξέρεις πως κρίθηκες και νίκησες κι είσαι σοφός σπουδαίος...»

Το πρόβλημα¹⁵⁸ ζητά να υπολογιστούν οι ταύροι και οι αγελάδες καθενός από τα παρακάτω χρώματα: λευκό, κυανό¹⁵⁹, ξανθό, ποικιλόχρωμο, το πλήθος των οποίων συμβολίζεται αντίστοιχα με τα γράμματα: Λ, Κ, Π, Ξ (για τους ταύρους) και λ, κ, π, ξ (για τις αγελάδες). Αποτελείται από δύο κύρια μέρη. Στο πρώτο κύριο μέρος δίνονται γραμμικές σχέσεις μεταξύ των αγνώστων που οδηγούν σε ένα σύστημα 7 εξισώσεων με 8 αγνώστους ενώ το δεύτερο μέρος του προβλήματος ζητά να προσδιοριστεί εκείνη η λύση η οποία ικανοποιεί δύο ακόμη συνθήκες.

Οι εξισώσεις αυτές είναι οι παρακάτω:

$$\Lambda = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \text{Κ} + \Xi$$

$$\text{Κ} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot \Pi + \Xi$$

$$\Pi = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \cdot \Lambda + \Xi$$

$$\pi = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \cdot (\Xi + \xi)$$

$$\xi = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \cdot (\Lambda + \lambda)$$

$$\kappa = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot (\Pi + \pi)$$

$$\lambda = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot (\text{Κ} + \kappa)$$

Η προκύπτουσα απάντηση είναι ασύλληπτα μεγάλος αριθμός, κάτι το οποίο γνώριζε ο συντάκτης του προβλήματος όπως φαίνεται από τα συμφραζόμενα.

¹⁵⁸ Μιχάλης Λάμπρου, 'Το Βοεϊκό πρόβλημα του Αρχιμήδη', Δ.Α. ΑΝΑΠΟΛΙΤΑΝΟΣ-Β. ΚΑΡΑΣΜΑΝΗΣ (επιμ.), κείμενα Ιστορίας και Φιλοσοφίας των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, σελίδες: 195-218, Τροχαλία, Αθήνα, 1992.

¹⁵⁹ Κυανό στα αρχαία δηλώνει το μαύρο.

Το χειρόγραφο περιλαμβάνει ένα σχόλιο το οποίο ισχυρίζεται ότι δίνει την απάντηση του προβλήματος, δεν συνοδεύεται όμως από την μέθοδο λύσης του. Η λύση του προβλήματος αυτού είναι μονοπαραμετρική και με ν συμβολίζεται η απροσδιόριστη παράμετρος. Στο σχόλιο αυτό οι αριθμοί που δίνονται ικανοποιούν τις 7 γραμμικές εξισώσεις και προκύπτουν από την τιμή « $\nu = 80$ » της παραμέτρου¹⁶⁰. όμως δεν ικανοποιούν τις συνθήκες του δεύτερου κύριου μέρους του προβλήματος.

Η γενική λύση είναι:

$$\Lambda = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 53 \cdot 4.657 \cdot \nu = 10.366.482 \cdot \nu$$

$$K = 2 \cdot 3^2 \cdot 89 \cdot 4.657 \cdot \nu = 7.460.514 \cdot \nu$$

$$\Pi = 2^2 \cdot 5 \cdot 79 \cdot 4.657 \cdot \nu = 7.358.060 \cdot \nu$$

$$\Xi = 3^4 \cdot 11 \cdot 4.657 \cdot \nu = 4.149.387 \cdot \nu$$

$$\lambda = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 373 \cdot \nu = 7.206.360 \cdot \nu$$

$$\kappa = 2 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 15.991 \cdot \nu = 4.893.246 \cdot \nu$$

$$\pi = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 761 \cdot \nu = 3.515.820 \cdot \nu$$

$$\xi = 3^2 \cdot 13 \cdot 46.489 \cdot \nu = 5.439.213 \cdot \nu$$

Μέχρι αυτό το σημείο το πρόβλημα δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο. Η δυσκολία εμφανίζεται όταν προσπαθήσει κανείς να ικανοποιήσει τις συνθήκες του δεύτερου μέρους του προβλήματος. Αυτό απαιτεί να είναι το άθροισμα ($\Lambda + K$) τέλειο τετράγωνο¹⁶¹ και το άθροισμα ($\Pi + \Xi$) να είναι τρίγωνος αριθμός. Η τιμή της παραμέτρου ν που ικανοποιεί την πρώτη από τις δύο συνθήκες είναι η εξής: $\nu = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4.657 \cdot \zeta^2$, όπου ζ ακέραιος αριθμός. Η δεύτερη συνθήκη μας οδηγεί σε μια εξίσωση Pell της μορφής $x^2 - Dy^2 = 1$, συγκεκριμένα την $x^2 - 410.286.423.278.424y^2 = 1$ η οποία δεν είναι καθόλου εύκολο να λυθεί.

Η απάντηση του προβλήματος είναι χαώδης¹⁶². Δηλαδή, το πλήθος των ταύρων και των αγελάδων κάθε χρώματος είναι παρά πολύ μεγάλο. Περισσότερο από 206.500 ψηφία η κάθε μία από τις απαντήσεις αυτές και για το λόγο αυτό είναι αδύνατο να τις προσδιορίσει

¹⁶⁰ Όπως επεσήμανε ο Lessing, στο χειρόγραφο που ανακάλυψε ο ίδιος, πρέπει να γίνει διόρθωση του πλήθους των ποικιλόχρωμων αγελάδων που δίνονται στο σχόλιο από 28129600 σε 281265600. Συμπληρώνουμε ότι πρόκειται για λάθος αντιγραφής και όχι λογισμού, αφού στο άθροισμα των βοών που δίνεται, έχει ληφθεί ο σωστός αριθμός.

¹⁶¹ Ορισμένοι μελετητές δίνουν διαφορετική ερμηνεία σε αυτή την συνθήκη: Επειδή οι ταύροι έχουν διαφορετικό μήκος από πλάτος, θα σχηματίζουν τετράγωνο όταν το πλήθος τους είναι γινόμενο $\alpha \times \beta$.

¹⁶² Μιχάλης Λάμπρου, 'Το Βοεϊκό πρόβλημα του Αρχιμήδη', Δ.Α.ΑΝΑΠΟΛΙΤΑΝΟΣ - Β.ΚΑΡΑΣΜΑΝΗΣ (επιμ.), κείμενα Ιστορίας και Φιλοσοφίας των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, σελίδες: 195-218, Τροχαλία, Αθήνα, 1992.

κανείς χωρίς την χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στη λύση με τη μικρότερη τιμή αντιστοιχεί πλήθος βοδιών που εκφράζεται με τον αριθμό 7766 ο οποίος ακολουθείται από 206541 μηδενικά. Για να γραφτούν οι τιμές όλων των αγνώστων του προβλήματος απαιτείται ένας τόμος 660 σελίδων.



Το 1965, δύο χιλιάδες χρόνια μετά την ανακάλυψη του χειρογράφου, οι Williams, German και Zarnke με χρήση δύο υπολογιστών της IBM κατέγραψαν την λύση όχι όμως πλήρη. Δημοσίευσαν το άρθρο τους την ίδια χρονιά, στο Mathematics of Computation, τόμος 19.

3.12 Το Στομάχιον

Σύμφωνα με τον Ευάγγελο Σ. Σταμάτη¹⁶³, το «Στομάχιον», ήταν ένα παιχνίδι που είχε κάνει μεγάλη εντύπωση στους Λατίνους συγγραφείς συμπεριλαμβανομένου του Αυσόνιου, του Καίσιου Βάσσου και του Μάριου Βικτωρινού. Σκοπός του παιχνιδιού αυτού ήταν η κατασκευή επίπεδων ευθύγραμμων κομματιών διαφόρων σχημάτων από μέταλλο ή ελεφαντοστό τα οποία με την συναρμολόγηση τους σχημάτιζαν κυρίως μορφές ζώων ή άλλων αντικειμένων. Μάλιστα η εν λόγω πραγματεία φαίνεται ότι περιείχε την θεωρία κατασκευής των 14 ευθύγραμμων τμημάτων του παραλληλογράμμου καθένα από τα οποία είχε ρητό λόγο προς το αρχικό σχήμα.

Ο Αυσόνιος¹⁶⁴ στην πραγματεία του «Γαμήλια ποιήματα» γράφει:

«simile ut dicas ludicro, quod Graeci ostomacheion vocavere. Ossicula ea sunt: ad summam quattuordecim figures geometricas habent[...]harum verticularum variis coagmentis simulantur species mille formarum: helephantus belua ant aper bestia, anser volans et mirmillo in armis, subsidens venator et latrans canis, quin[...]».

(Όμοιο μπορείς να πεις το παιχνίδι εκείνο το οποίο οι Έλληνες ονόμασαν Στομάχιον. Πρόκειται για αυτά τα οστάρια. Έχουν στο σύνολο 14 γεωμετρικά σχήματα[...]. Με ποικίλες συναρμολογήσεις αυτών των οσταρίων γίνεται απομίμηση χιλίων μορφών ειδών. Ελέφαντα ή αγριόχοιρου ή χήνας που πετάει και οπλισμένου μονομάχου, κυνηγού που έχει στήσει ενέδρα και σκύλου ή πύργου[...]).

Και ο Καίσιος Βάσσος¹⁶⁵ γράφει και αυτός:

«Nam si locus ille \ Archimedeus, qui quattuordecim eboreas lamellas, quarum varii anguli sunt, in quadratam formam inclusas habet, componentibus nobis, aliter atque aliter modo qaleam, modo sicam, alias columnam, alias navem figurat[...]».

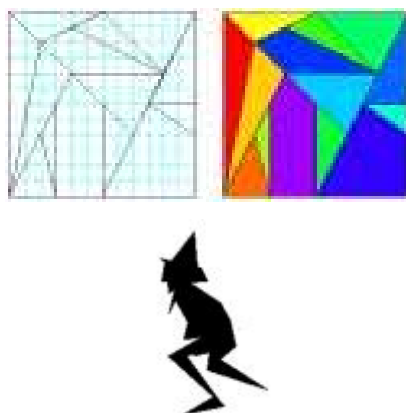
(Ας λάβουμε ως βάση το Αρχιμήδειο εκείνο κιβώτιο το οποίο έχει ως 14 οστάρια από ελεφαντοστό, το καθένα από αυτά με ποικίλες γωνίες, και τα οποία έχουν εγκλειστεί σε

¹⁶³ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α, σελίς 8.

¹⁶⁴ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α - Μαρτυρία 203.

¹⁶⁵ 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ευάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α - Μαρτυρία 204.

τετράγωνο σχήμα, εφόσον εμείς τα συνθέτουμε κατά τέτοιο τρόπο που άλλοτε σχηματίζουν περικεφαλαία, άλλοτε εγχειρίδιο, άλλοτε στήλη, άλλοτε πλοίο[...]).



Το «Στομάχιον» ήταν πάντα εκείνο το έργο του Αρχιμήδη που προσείλκυε το μικρότερο ενδιαφέρον για τους ερευνητές. Και ο λόγος για τον οποίο συνέβαινε κάτι τέτοιο ήταν τόσο διότι έλειπαν οι σχετικές πληροφορίες όσο και επειδή, με βάση τις πτωχές διαθέσιμες αναφορές, είχε θεωρηθεί ως ένα παιδικό παιχνίδι (κάτι σαν αρχαίο παζλ) που προφανώς ήταν ανάξιο της φήμης του μεγάλου μαθηματικού Αρχιμήδη.

Τον Νοέμβριο του 2003¹⁶⁶ ο Bill Cutler χρησιμοποίησε ένα πρόγραμμα στον υπολογιστή προκειμένου να απαριθμήσει όλες τις πιθανές λύσεις. Περιestroφές, αντανakλάσεις...και βρήκε 536 διαφορετικές λύσεις. Όμως, τον Ιούνιο του 2005¹⁶⁷ στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής ήρθαν στην επιφάνεια νέα δεδομένα. Ερευνητές έπειτα από προσεκτική μελέτη του παλιμνηστου κώδικα του Αρχιμήδη κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι πρόκειται για ένα πρόβλημα συνδυαστικής το οποίο είναι το παρακάτω. Χωρίζοντας ένα τετράγωνο σε 14 μέρη διαφορετικών επίπεδων σχημάτων, αναζητούσε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους αναδιατεταγμένα θα ξανασυνέθεταν το ίδιο τετράγωνο. Το σύνολο των τρόπων αυτών είναι 17.152 και για να βρεθούν εργάστηκαν 4 μαθηματικοί για 6 ολόκληρες βδομάδες.

Ο Ιστορικός των Μαθηματικών Rebiel Netz¹⁶⁸ του Πανεπιστημίου του Stanford πιστεύει ότι ο Αρχιμήδης είχε λύσει το πρόβλημα. Υποστηρίζει διαφορετικά, αν δεν είχε καταφέρει να το λύσει, δεν θα το έθετε. Όμως ο Rebiel Netz δεν γνωρίζει αν ο Αρχιμήδης είχε καταφέρει να βρει όλους τους συνδυασμούς.

¹⁶⁶ 'The Loculus of Archimedes', Math Games – ιστοσελίδα http://www.maa.org/editorial/mathgames_11_17_03.html

¹⁶⁷ ΤΑ ΝΕΑ, 04-11-2000, Σελ.Ν27, Κωδικός άρθρου:Α16886Ν271.

¹⁶⁸ «Αρχαία Σπάρτη – Το 'Στομάχιον' του Αρχιμήδη» – ιστοσελίδα: <http://www.spartans.gr>

Κεφάλαιο 4^ο

Υπολογισμός του εμβαδού της έλλειψης

Ο Αρχιμήδης στην πραγματεία του *«Περί κωνοειδών και σφαιροειδών»* υπολογίζει το εμβαδόν της έλλειψης με μία τελείως διαφορετική απόδειξη.

Στην εισαγωγική επιστολή προς τον Δοσίθεο ορίζει το παραβολοειδές εκ περιστροφής ως εξής: *«Εάν τομή ορθογωνίου κώνου εκτελέσει περιστροφή περί την ακίνητη διάμετρό του και επιστρέψει στη θέση από την οποία ξεκίνησε, το σχήμα που θα διαγράψει η παραβολή καλείται παραβολοειδές εκ περιστροφής»* και το υπερβολοειδές εκ περιστροφής ως εξής: *«Εάν σε επίπεδο έχουμε τομή αμβλυγώνιου κώνου, τη διάμετρό της και τις ασύμπτωτες της και το επίπεδο που περιέχει αυτές τις περιστραφεί περί τη διάμετρο που παραμένει σταθερή, εκτελέσει πλήρη περιστροφή και στη θέση από όπου ξεκίνησε, είναι φανερό ότι οι ασύμπτωτες της τομής του αμβλυγώνιου κώνου θα διαγράψουν ισοσκελή κώνο, κορυφή του οποίου θα είναι το σημείο τομής των ασυμπτώτων και άξονας η διάμετρος που παρέμεινε σταθερή. Το σχήμα που θα διαγράψει η τομή αμβλυγώνιου κώνου θα καλείται υπερβολοειδές εκ περιστροφής»*. Γράφει ως συμπέρασμα ότι: *«Τα παραβολοειδή εκ περιστροφής λοιπόν, είναι όλα όμοια μεταξύ τους, από τα υπερβολοειδή εκ περιστροφής ονομάζουμε όμοια εκείνα στα οποία όμοιοι μεταξύ τους είναι οι ασυμπτωτικοί κώνοι»*.

Ο Αρχιμήδης ορίζει το επίμηκες σφαιροειδές ως το σχήμα εκείνο που διαγράφεται *«Εάν τομή οξυγώνιου κώνου περιστρεφόμενη περί τη σταθερή μεγαλύτερη διάμετρό της επιστρέψει στη θέση από την οποία ξεκίνησε»* και ορίζει το πεπλατυσμένο σφαιροειδές το σχήμα εκείνο που διαγράφεται *«Εάν τομή οξυγώνιου κώνου περιστραφεί περί τη μικρότερη διάμετρό της που παραμένει σταθερή και εκτελέσει πλήρη περιστροφή»*.

Ως εισαγωγή στην απόδειξη του εμβαδού της έλλειψης διατυπώνει τους παρακάτω ορισμούς:

▫ Εάν κώνος τμηθεί από επίπεδο που συναντά όλες τις πλευρές του κώνου, η τομή θα είναι κύκλος ή τομή οξυγώνιου κώνου. Εάν η τομή είναι κύκλος, είναι φανερό ότι το αποκομμένο τμήμα προς την πλευρά της κορυφής του κώνου θα είναι κώνος, εάν η τομή είναι τομή οξυγώνιου κώνου το αποκομμένο τμήμα προς την πλευρά της κορυφής του κώνου καλείται τμήμα κώνου, βάση του τμήματος θα καλείται η επίπεδη επιφάνεια που ορίζεται από τη τομή

οξυγώνιου κώνου, κορυφή το σημείο που αποτελεί και κορυφή του κώνου και άξονας το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή του κώνου προς το κέντρο της τομής οξυγώνιου κώνου.

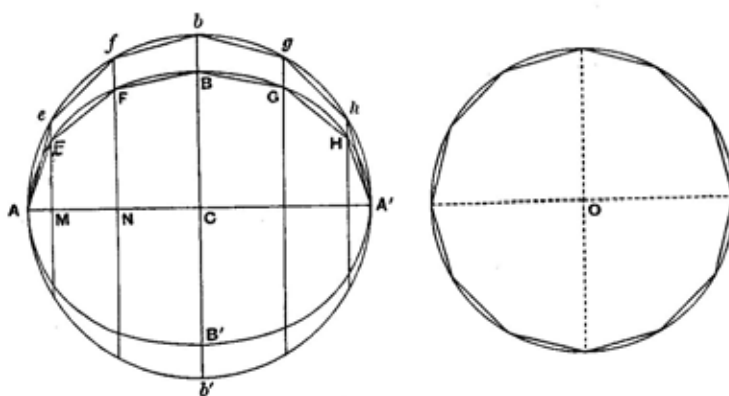
▫ Εάν κύλινδρος τμηθεί από δύο παράλληλα επίπεδα τα οποία συναντούν όλες τις πλευρές του κυλίνδρου, οι τομές θα είναι είτε κύκλοι είτε τομές οξυγώνιων κώνων ίσες και όμοιες μεταξύ τους. Εάν τυχόν οι τομές προκύψουν κύκλοι, είναι φανερό ότι το τμήμα μεταξύ των δύο παράλληλων επιπέδων που αποκόπτεται από τον κύλινδρο θα είναι κύλινδρος, εάν όμως οι τομές προκύψουν τομές οξυγώνιων κώνων, το τμήμα μεταξύ των δύο παραλλήλων επιπέδων που αποκόπτεται από τον κύλινδρο καλείται τόμος κυλίνδρου και βάσεις του τόμου καλούνται οι επίπεδες επιφάνειες που ορίζουν οι τομές οξυγώνιων κώνων και άξονας η ευθεία που ενώνει τα κέντρα των τομών οξυγώνιων κώνων. Η ευθεία αυτή θα κείται επί της ευθείας όπου κείται ο άξονας του κυλίνδρου.

Πρόταση

Ο λόγος του εμβαδού της έλλειψης προς το εμβαδόν του βοηθητικού κύκλου είναι ίσο με το λόγο του ελάσσονα άξονα (της έλλειψης) προς το μείζονα.

Απόδειξη

Έστω AA' ο μέγας και BB' ο μικρός άξονας της έλλειψης και έστω ότι η προέκταση του άξονα BB' τέμνει τον κύκλο στα σημεία β και β' αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα 17. Και έστω κύκλος O τέτοιος ώστε: $\frac{\text{Εμβαδόν}(AbA'b')}{\text{Εμβαδόν}(O)} = \frac{CA}{CB}$. Τότε θα πρέπει το εμβαδόν του κύκλου O να είναι ίσο με το εμβαδόν της έλλειψης. Διαφορετικά, το εμβαδόν του κύκλου O θα είναι είτε μικρότερο είτε μεγαλύτερο από το εμβαδόν της έλλειψης.



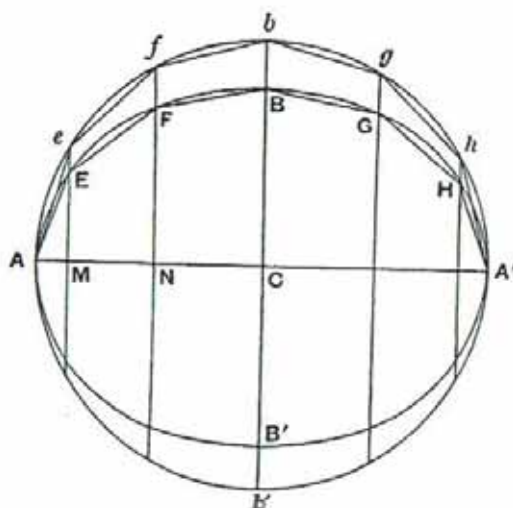
σχήμα 17

- Υποθέτουμε ότι το εμβαδόν του κύκλου O είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν της έλλειψης. Τότε μπορούμε να εγγράψουμε στον κύκλο O ένα κανονικό πολύγωνο με πλήθος πλευρών πολλαπλάσιο του 4, τέτοιο ώστε το εμβαδόν του, έστω C , να είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν της έλλειψης.

Εγγράφουμε τώρα στο βοηθητικό κύκλο της έλλειψης το πολύγωνο $A\epsilon f\beta ghA'b'A$, όπως φσίνεται στο σχήμα 17 παρακάτω, όμοιο με εκείνο που εγγράψαμε στον κύκλο O . Έστω ότι οι κάθετες eM , fN , bC , ... τέμνουν την έλλειψη στα σημεία E , F , B , G

και Η αντίστοιχα. Τότε ενώνουμε τα σημεία αυτά φέρνοντας τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ, ΕF, FΒ, ΒG, GΗ, ...

Έστω Ρ' το εμβαδόν του εγγεγραμμένου πολυγώνου στο βοηθητικό κύκλο και Ρ το εμβαδόν του εγγεγραμμένου πολυγώνου στην έλλειψη. Τότε $\frac{eM}{EM} = \frac{fN}{FN} = \dots = \frac{bC}{BC}$. Τα ζευγάρια των τριγώνων, όπως τα eΑΜ και ΕΑΜ, και τα ζευγάρια των τραπεζίων, όπως τα eΜNf και ΕΜNΓ, έχουν όλα το ίδιο λόγο το ένα ως προς το άλλο, και ο λόγος αυτός είναι ίσος με το λόγο της bC προς τη BC και συνεπώς με το λόγο της CA προς τη CB, όπως φαίνεται στο σχήμα 18.



σχήμα 18

Με πρόσθεση των τριγώνων και των τραπεζίων προκύπτει η σχέση: $\frac{P'}{P} = \frac{CA}{CB}$.

Επειδή όμως ισχύει ότι $\frac{P'}{C} = \frac{\text{Εμβαδόν}(AbA'b')}{\text{Εμβαδόν}(O)}$ και εφόσον $\frac{\text{Εμβαδόν}(AbA'b')}{\text{Εμβαδόν}(O)} = \frac{CA}{CB}$

τότε προκύπτει ότι $\frac{P'}{C} = \frac{CA}{CB}$. Θα πρέπει λοιπόν $C = P$. Δηλαδή, θα πρέπει το εμβαδόν του εγγεγραμμένου πολυγώνου στο κύκλο Ο να είναι ίσο με το εμβαδόν του εγγεγραμμένου πολυγώνου στην έλλειψη.

Όμως αυτό είναι αδύνατο, επειδή υποθέσαμε ότι το εμβαδόν του εγγεγραμμένου πολυγώνου στο κύκλο Ο είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν της έλλειψης και συνεπώς θα είναι μεγαλύτερο και από το εμβαδόν του εγγεγραμμένου πολυγώνου στην έλλειψη.

Επομένως, το εμβαδόν του κύκλου Ο δεν είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν της έλλειψης.

- Υποθέτουμε ότι το εμβαδόν του κύκλου Ο είναι μικρότερο από το εμβαδόν της έλλειψης. Σε αυτήν τη περίπτωση εγγράφουμε στην έλλειψη ένα πολύγωνο Ρ, με πλήθος ίσων πλευρών πολλαπλάσιο του 4, τέτοιο ώστε το εμβαδόν του εγγεγραμμένου πολυγώνου να είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του κύκλου Ο.

Έστω ότι οι κάθετες από τα γωνιακά σημεία του πολυγώνου Ρ στον άξονα ΑΑ' προεκτείνονται και τέμνουν το βοηθητικό κύκλο και έστω ότι ενώνοντας αυτά τα σημεία τομής σχηματίζεται το εγγεγραμμένο πολύγωνο Ρ' στο βοηθητικό κύκλο. Εγγράφουμε τώρα στο κύκλο Ο ένα πολύγωνο όμοιο με το Ρ'.

$$\text{Τότε όπως προηγουμένως, } \frac{P'}{P} = \frac{CA}{CB} = \frac{\text{Εμβαδόν}(AbA'b')}{\text{Εμβαδόν}(O)} = \frac{P'}{C}. \text{ Επομένως,}$$

θα πρέπει $C = P$. Δηλαδή, θα πρέπει το εμβαδόν του εγγεγραμμένου πολυγώνου στο κύκλο Ο να είναι ίσο με το εμβαδόν του εγγεγραμμένου πολυγώνου στην έλλειψη.

Όμως αυτό είναι αδύνατο, επειδή υποθέσαμε ότι το εμβαδόν της έλλειψης είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του κύκλου.

Επομένως, εφόσον το εμβαδόν του κύκλου Ο δεν είναι δυνατόν να είναι ούτε μεγαλύτερο ούτε μικρότερο από το εμβαδόν της έλλειψης, τότε είναι ίσο με αυτό.

Παρατήρηση:

Ο μαθητής του Γαλιλαίου, ο Bonaventura Cavalieri προσπαθούσε να βρει μια ευρετική μέθοδο για να αντικαταστήσει την αρχή της εξάντλησης του Αρχιμήδη. Το 1635 δημοσίευσε το έργο του «*Geometria Indivisibilibus*» (γεωμετρία των αδιαιρέτων) στο οποίο κυριαρχούσε η έννοια του «αδιαιρέτου». Το έργο αυτό αποτελούταν από επτά βιβλία, όπου ο Cavalieri χωρίς να διευκρινίζει τι εννοεί όταν χρησιμοποιεί αυτή την έννοια, διατυπώνει μια θεωρία σύμφωνα με την οποία κάθε αδιαίρετο με την κίνηση του γεννά το επόμενο ανώτερο συνεχές. Το κινούμενο σημείο με τη κίνησή του γεννά μια γραμμή και η γραμμή κινούμενη παράγει μια επιφάνεια η οποία αποτελείται από ένα άπειρο πλήθος παράλληλων ευθειών. Όμοια, μια κινούμενη επιφάνεια γεννά ένα στερεό που αποτελείται από παράλληλα επίπεδα.

Ο Cavalieri έθετε τα αδιαίρετα δύο δεδομένων γεωμετρικών σχημάτων σε μια 1-1 αντιστοιχία. Αν τα αντίστοιχα αδιαίρετα στοιχεία των δύο γεωμετρικών σχημάτων είχαν

ένα σταθερό λόγο, τότε συμπέρανε ότι και τα εμβαδά ή οι όγκοι αυτών των σχημάτων είχαν τον ίδιο λόγο. Το εμβαδόν ή ο όγκος του ενός εκ των δύο σχημάτων ήταν γνωστό, οπότε εύκολα έβρισκε το εμβαδόν ή τον όγκο του άλλου σχήματος αντίστοιχα.

Η μέθοδος του Cavalieri να συγκρίνει δύο γεωμετρικά σχήματα, συγκρίνοντας τα αδιαίρετα του ενός με τα αδιαίρετα του άλλου, βασίζεται σε μια αρχή που είναι γνωστή ως «Θεώρημα του Cavalieri»¹⁶⁹:

«Αν δύο στερεά έχουν ίσα ύψη και αν οι τομές υπό επιπέδων παραλλήλων προς τις βάσεις και σε ίσες αποστάσεις από αυτές βρίσκονται πάντα σε δοθέντα λόγο, τότε οι όγκοι των στερεών έχουν επίσης τον ίδιο λόγο».

Ο Cavalieri προκειμένου να αποδείξει ότι η μεθοδός του ήταν ορθή, έδειξε ορισμένα αποτελέσματα που ήταν ήδη γνωστά ακολουθώντας την δική του μέθοδο. Θα περιγράψω πως με την αρχή του Cavalieri μπορούμε να αποδείξουμε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν της έλλειψης με ημιάξονες a και b χρησιμοποιώντας έναν κύκλο ακτίνας a , αποφεύγοντας την αρχή της εξάντλησης.

Έστω κύκλος ακτίνας a , όπως φαίνεται στο σχήμα 18. Η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$y^2 + x^2 = a^2 \Rightarrow y^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow y_K = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Έστω έλλειψη στο εσωτερικό του κύκλου, με εξίσωση : $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$. Λύνοντας και

αυτή την εξίσωση ως προς y έχουμε ότι: $(\frac{y}{b})^2 = 1 - (\frac{x}{a})^2 \Rightarrow y^2 = b^2 [1 - (\frac{x}{a})^2] \Rightarrow$

$$y^2 = (\frac{b}{a})^2 (a^2 - x^2) \Rightarrow y_E = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

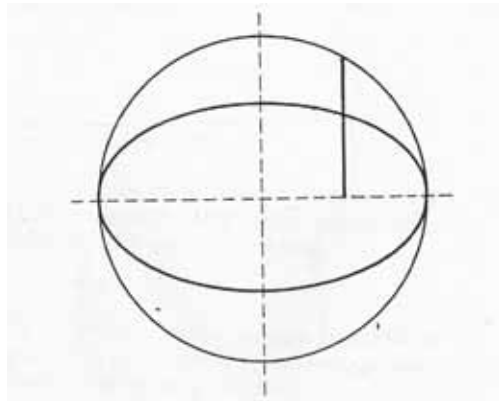
Τα y_E και y_K είναι τα μήκη που αποκόπτονται αν φέρουμε ευθεία παράλληλη στον άξονα των y . Διαιρώντας τα βρίσκουμε μια σταθερά (την $\frac{b}{a}$):

$$\frac{y_E}{y_K} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{y_E}{y_K} = \frac{b}{a}.$$

¹⁶⁹ Ευστάθιος Γιαννακούλιας, «Σύντομη ιστορική ανασκόπηση της εξέλιξης του Απειροστικού Λογισμού».

Σύμφωνα με την αρχή του Cavalieri, αν δύο επίπεδα σχήματα έχουν το ίδιο ύψος και βρίσκονται μεταξύ παράλληλων ευθειών και αν φέρουμε οποιαδήποτε ευθεία παράλληλη προς τις αρχικές ευθείες και συμβεί ο λόγος των μηκών των ευθυγράμμων τμημάτων που αποκόπτονται να είναι σταθερά, τότε τον ίδιο λόγο θα έχουν και τα αντίστοιχα εμβαδά των επίπεδων σχημάτων.



σχήμα 19

Σε αυτό εδώ το σημείο αν εφαρμόσουμε την αρχή του Cavalieri ο λόγος του εμβαδού της έλλειψης προς το εμβαδόν του κύκλου θα ισούται με την σταθερά αυτή.

$$\text{Δηλαδή: } \frac{\text{Εμβαδόν}(E)}{\text{Εμβαδόν}(K)} = \frac{b}{a} \Rightarrow$$

$$\frac{\text{Εμβαδόν}(E)}{\pi \cdot a \cdot a} = \frac{b}{a} \Rightarrow$$

$$\text{Εμβαδόν}(E) = \frac{\pi \cdot a \cdot a \cdot b}{a} \Rightarrow$$

$$\text{Εμβαδόν}(E) = \pi \cdot a \cdot b .$$

Επίλογος

Οι επιρροές που άσκησε ο Αρχιμήδης

Ο Αρχιμήδης άσκησε, μέσω των έργων, του μεγάλη επιρροή όχι μόνο στους συγχρόνους του αλλά και στους περισσότερους μεταγενέστερους μαθηματικούς σε ολόκληρο τον κόσμο. Απασχόλησε σε μεγάλο βαθμό την ευρωπαϊκή επιστημονική σκέψη, καθώς και τους Άραβες επιστήμονες, οι οποίοι αντέγραψαν όλα τα έργα του στα αραβικά, γλώσσα στην οποία διασώθηκαν αρκετά, αφού τα πρωτότυπα είχαν χαθεί.

Μέχρι περίπου το 1675¹⁷⁰, η μελέτη διαφόρων προβλημάτων ολοκλήρωσης, υπολογισμού εμβαδών, όγκων και κέντρου βάρους από τους μαθηματικούς της εποχής χαρακτηριζόταν από τη χρήση των μεθόδων του Αρχιμήδη. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι εργασίες του Φραγκίσκου Μαυρόλुकου, του Federigo Commandino, του Simon Stevin και του Francois Viete.

Τα έργα του Αρχιμήδη μελετήθηκαν στην Αλεξάνδρεια από τρεις έξοχους μαθηματικούς: τον Ήρωνα, τον Πάππο και τον Θέωνα και σχολιάστηκαν από τον Ευτόκιο τον Ασκαλωνίτη. Αργότερα, διδάχθηκαν από τον Ανθέμιο και από τον Ισίδωρο τον Μιλήσιο. Επιπλέον, πολλοί βυζαντινοί συγγραφείς ασχολήθηκαν με την έκδοση των έργων αυτών.

Αξιοθαύμαστη όμως επιρροή σημείωσαν οι μαθηματικού περιεχομένου ανακαλύψεις του Αρχιμήδη και στους Άραβες. Ο Ishaq ibn Hunayn, ο Thabit ibn Qurra και ο Nasir ad-Din al-Tusi έδειξαν ενδιαφέρον για την πραγματεία του Αρχιμήδη «Περί σφαίρας και κυλίνδρου» και μάλιστα οι δύο τελευταίοι μετάφρασαν το έργο του «Κύκλου μέτρησις». Ιδιαίτερα η πραγματεία του Αρχιμήδη «Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομή» τράβηξε την προσοχή του Thabit ibn Qurra. Όμως και με τα υπόλοιπα έργα του, όπως είναι το «Περί Οχουμένων», το «Επιπέδων ισορροπιών», το «Βιβλίο Λημμάτων» και το «Περί επτάγωνου εγγεγραμμένου σε κύκλο» ασχολήθηκαν οι Άραβες μαθηματικοί στους οποίους συγκαταλέγεται και ο Ibn al-Hay-tham (Alhazen). Το μεγάλο αυτό ενδιαφέρον που έδειξαν οι Άραβες μαθηματικοί για τα επιτεύγματα του Αρχιμήδη είναι φανερό και από τις αναφορές τους, με τις οποίες αποδίδουν στον σπουδαίο αυτό Έλληνα μαθηματικό διάφορα έργα.

¹⁷⁰ Νεγρεπόντης Σ. – Γιωτόπουλος Σ. – Γιαννακούλιας Ε., 'Απειροστικός Λογισμός', Τόμος Ι, Εκδόσεις Συμμετρία, σελίς 202.

Πιο συγκεκριμένα, ο Άραβας μαθηματικός Ibn al-Haytham στην πραγματεία του για την κατασκευή του κανονικού επταγώνου αναφέρει την «νεύση», την οποία και αποδίδει στον Αρχιμήδη και επιπλέον ο Άραβας λόγιος al-Biruni του αποδίδει τον γνωστό σε εμάς σήμερα ως τύπο του Ήρωνα $\sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$.

Από τον Αρχιμήδη όμως, δεν επηρεάστηκαν μονάχα οι Άραβες. Επιρροή δέχτηκαν και οι επιστήμονες στην Δύση. Έργα του Αρχιμήδη μεταφράστηκαν από τον Plato από την Tivoli, από τον Gerard από την Κρεμόνα και από τους εξής γεωμέτρες: τον Thomas Bradwardine, τον Roger Bacon και τον Gerard από τις Βρυξέλλες. Αργότερα, έξοχοι μαθηματικοί όπως ο Jordanus de Nemore και ο Leonardo Fibonacci ασχολήθηκαν με αρκετά από τα έργα του Αρχιμήδη. Ο Johannes de Tinemue μέσω του έργου του «*De curvis superficiebus Archimedis*» έκανε γνωστά ορισμένα από τα αποτελέσματα και τις τεχνικές που περιέχει η πραγματεία του Αρχιμήδη «*Περί σφαίρας και κυλίνδρου*».

Μεγάλο σταθμό σε αυτή την παγκόσμια επιρροή αποτέλεσαν οι μεταφράσεις σχεδόν όλων των έργων του Έλληνα μαθηματικού, από τον William Moerbeke. Από εκείνη την περίοδο και έπειτα ασχολήθηκαν με τις πραγματείες του Αρχιμήδη ο John of Meurs, ο Nicole Oresme και ο Henry of Hesse.

Τα έργα του Αρχιμήδη με την πάροδο του χρόνου εξαπλώθηκαν σε ολόκληρη την Ευρώπη. Σε αυτήν την επέκταση βοήθησαν και οι μεταφράσεις του James από την Κρεμόνα, ένα μέρος από τις οποίες χρησιμοποίησε ο Nicholas of Cusa στην πραγματεία του «*De mathematicis complementis*» και επίσης αυτές του L. Gaurico τις οποίες επανέκδωσε αργότερα ο Niccolo Tartaglia. Επιπλέον, μεταφράσεις των πραγματειών του Αρχιμήδη πραγματοποίησαν οι: Curtius Triostanus, Federigo Commandino, Francesco Maurolico, Antonius de Albertis, Pierre Forcadel, J. C. Sturm, Isaac Barrow και Joseph Torelli, οι οποίες συνέβαλαν στην τεράστια αυτή επιρροή αφού διέδωσαν ευρέως τα επιτεύγματα του μεγαλύτερου μαθηματικού του ελληνικού χώρου.

Στοιχεία της αυθεντικότητας του Αρχιμήδη είναι προφανή και στα έργα γνωστών και σπουδαίων μαθηματικών όπως είναι ο Commandino, ο Guido Ubaldi del Monte, ο Benedetti, ο Simon Stevin, ο Luca Valerio, ο Kepler, ο Galileo, ο Cavalieri, ο Torricelli και πολλοί άλλοι. Η μεγάλη συμβολή του Αρχιμήδη στην εξέλιξη τόσο της μαθηματικής ανάλυσης όσο και των μαθηματικών γενικότερα υπογραμμίζεται από πολλούς μαθηματικούς και ιστορικούς της επιστήμης των Μαθηματικών.¹⁷¹

¹⁷¹ Βαγγέλης Σπανδάγος – Ρούλα Σπανδάγου – Δέσποινα Τραυλού, «Οι Μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδας», Εκδ. Αίθρα, σελίς. 192-193.

Ο G. Leibnitz γράφει:

«Όποιος διαβάξει τα έργα του Αρχιμήδη θαυμάζει λιγότερο τα επιτεύγματα των νεοτέρων».

Ενώ ο G. Loria στην *«Ιστορία των Μαθηματικών»* του γράφει:

«Αν όλα τα έργα των Αράβων μαθηματικών είχαν γίνει έγκαιρα γνωστά και κατανοητά από τους Ευρωπαίους, η έξοδος από τον τάφο του μεγάλου Συρακουσίου θα είχε γίνει μερικούς αιώνες νωρίτερα και θα είχε ως αποτέλεσμα την ταχύτερη διαμόρφωση της σημερινής απειροστικής αναλύσεως».

Ο Δανός ιστορικός H. Zeuthen στο βιβλίο του *«Οι κωνικές τομές της αρχαιότητας»* γράφει:

«Οι προσδιορισμοί των όγκων και των επιφανειών που εκτελούνται από τον Αρχιμήδη με τη διαίρεση σε μέρη, που όλα μπορούν να είναι οσοδήποτε μικρά, συμφωνούν ακριβώς με τον υπολογισμό τους με ολοκλήρωση».

Η διακεκριμένη ιστορικός των μαθηματικών και καθηγήτρια στο Πανεπιστήμιο Λομονόσωφ της Μόσχας, Ισαβέλλα Μπασμακόβα, στο βιβλίο της *«Οι μέθοδοι διαφορίσεως του Αρχιμήδους»* υποστηρίζει ότι:

«Ο Αρχιμήδης είχε βρει μέθοδο προσδιορισμού εφαπτομένων και ήταν κάτοχος μεθόδων που του επέτρεπαν να ανάγει τα προβλήματα μεγίστου και ελάχιστου σε προβλήματα εφαπτομένων».

Στη συνέχεια αποδεικνύει ότι:

«Όχι μόνο οι μέθοδοι ολοκλήρωσης, αλλά και οι μέθοδοι διαφορίσης του μεγάλου Συρακουσίου ήταν γνωστές στους μαθηματικούς του 17^{ου} αιώνα».

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

- Boyer Carl – Uta C. Merzbach (1997), Η ιστορία των Μαθηματικών, εκδ.Γ.Α.Πνευματικού, Αθήνα.
- B.L.Van Der Waerden (2000), Η αφύπνιση της επιστήμης, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.
- Γιαννακούλιας Ευστάθιος (2006), Διδακτική του Απειροστικού Λογισμού, Σημειώσεις Παραδόσεων, Πανεπιστήμιο Αθηνών (τμήμα Μαθηματικών), Αθήνα.
- Γεωργακόπουλος Κ. (1995), Αρχαίοι Έλληνες Θετικοί Επιστήμονες, Εκδόσεις Γεωργιάδης, Αθήνα.
- Λάζος Χ. (1995), Αρχιμήδης ο ευφυής μηχανικός, Εκδόσεις Αίολος.
- Λάμπρου Μ. (1992), Το Βοεϊκό πρόβλημα του Αρχιμήδη, Αναπολιτάνος Δ. - Καρασμάνης Β., Κείμενα Ιστορίας και Φιλοσοφίας των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.
- Λάμπρου Μ. (2001), Το Παλίμψηστο του Αρχιμήδη, Πανεπιστήμιο Κρήτης, τμήμα Μαθηματικών, Ηράκλειο.
- Νεγρεπόντης Σ. – Γιωτόπουλος Σ. – Γιαννακούλιας Ε. (1999), Απειροστικός Λογισμός – Τόμος Ι, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.
- Νικολαΐδη Ε. – Φράγκου Μ. (2006), Αρχιμήδης το θεϊκό μυαλό, Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.

- Πλούταρχος (1993), Βίοι παράλληλοι: Πελοπίδας – Μάρκελλος, Εκδόσεις Αρχαία Ελληνική Γραμματεία, Εκδότης Οδυσσέας Χατζόπουλος, Αθήνα.
- Σακκάς Ι. (1973), Ο Αρχιμήδης κατέκαυσεν τον στόλο των Ρωμαίων δι' επιπέδων κατόπτρων, Τεχνικά Χρονικά, Εκδόσεις Τ.Ε.Ε.
- Σπανδάγος Β. (1999), Οι Φυσικοί Επιστήμονες της Αρχαίας Ελλάδος, Μέρος ΙΙ, Εκδόσεις, Αθήνα.
- Σπανδάγος Β. – Σπανδάγου Ρ – Τραύλου Δ. (1994), Οι Μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδας, Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα.
- Σταμάτης Ε. (1964), Άπαντα του Αρχιμήδη - Τόμος Α΄, Τεχνικό Επιμελητήριο Ελλάδας, Αθήνα.
- Σταμάτης Ε. (1964), Άπαντα του Αρχιμήδη - Τόμος Β΄, Τεχνικό Επιμελητήριο Ελλάδας, Αθήνα.
- Χριστιανίδης Γ. (2001), Το Παλίμψηστο αποκαλύπτει το αληθινό «εύρηκα» του Αρχιμήδη, Ελευθεροτυπία.
- Χριστιανίδης Γ. (2003), Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.

Ξένη

- Boyer C. (1968), A History of Mathematics, John Wiley, New York.
- Dijksterhuis E.J. (1987), Archimedes, Princeton, NJ, Princeton University Press.
- Encyclopedia Britannica (1952), INC William Benton, Publisher Chicago.
- Heath T. (1981), A History of Greek Mathematics, Volume II, From Aristarchus to Diophantus, Dover Publications.
- Loria G. (1978), Ιστορία των Μαθηματικών, Εκδόσεις Ελληνική Μαθηματική Εταιρία, Αθήνα.
- Reader A. – Fauvel J. – Gray J. (1987), The history of Mathematics, J. Fauvel and J. Gray, The Open University, England.
- Smith D.E. (1958), History of Mathematics, Dover Publications, New York .
- Vitruvius (1964), De Architectura, Βιβλία I-5, 27-10,7/ VII-160,2 / VIII 206,9 / IX-215,8,9.