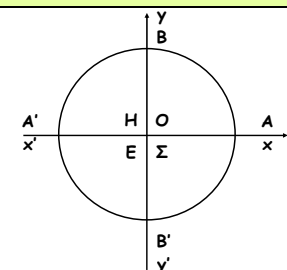


ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

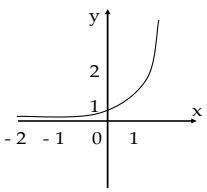
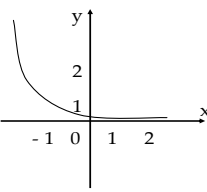
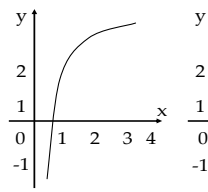
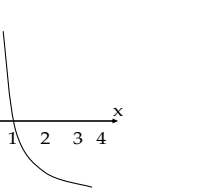
ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ	
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ αν ν περιττός $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - b^{n-1})$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ $(a+b+\gamma)^2 = a^2 + b^2 + \gamma^2 + 2ab + 2b\gamma + 2a\gamma$ $\begin{cases} a^3 + b^3 + \gamma^3 - 3ab\gamma = \frac{1}{2} (a+b+\gamma)[(a-b)^2 + (b-\gamma)^2 + (\gamma-a)^2] \\ \text{αν } a+b+\gamma=0 \text{ τότε } a^3 + b^3 + \gamma^3 = 3ab\gamma \end{cases}$
ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ	ΡΙΖΕΣ
$ a = \begin{cases} a & \text{αν } a \geq 0 \\ -a & \text{αν } a < 0 \end{cases}$ $ a \geq 0$ $- a \leq a \leq a $ $ a - b \leq a+b \leq a + b $ για $\theta > 0$: <ul style="list-style-type: none"> • $x < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ • $x > \theta \Leftrightarrow x > \theta \text{ ή } x < -\theta$ • $x = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$ $ x = a \Leftrightarrow x = a \text{ ή } x = -a$ $d(a, \beta) = a - \beta $	Για $a, \beta, x \geq 0$ $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a$ $\sqrt{a^2} = a $ $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$ $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ $\sqrt[3]{a^m \cdot b} = a\sqrt[3]{b}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{mk}}} = \sqrt[n]{a^m}$
ΤΡΙΩΝΥΜΟ	
$ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$ $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$ $\Delta > 0 \quad x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\Delta = 0 \quad x = \frac{-\beta}{2a}$ $\Delta < 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες	$S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{a}$ $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$ $F(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ αν $\Delta > 0 \quad F(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ αν $\Delta = 0 \quad F(x) = a\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2$ αν $\Delta < 0$ δεν παραγοντοποιείται

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ				
Τόξο	ημ	συν	εφ	σφ
0° ή 0	0	1	0	—
30° ή π/6	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45° ή π/4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
60° ή π/3	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
90° ή π/2	1	0	—	0
120° ή 2π/3	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$
135° ή 3π/4	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1
150° ή 5π/6	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$
180° ή π	0	-1	0	—
270° ή 3π/2	-1	0	—	0
360° ή 2π	0	1	0	—

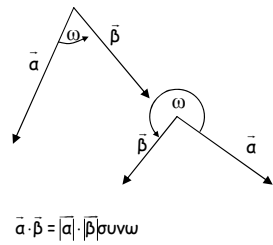
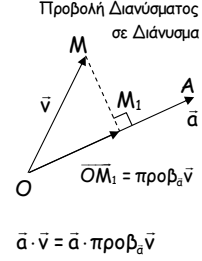
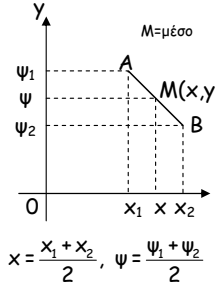
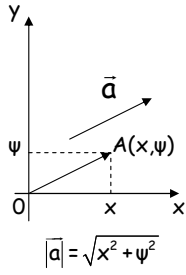
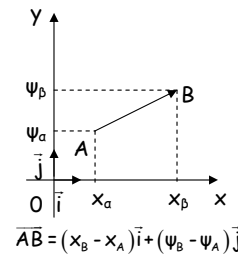
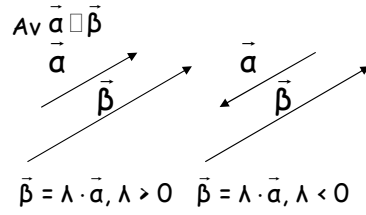
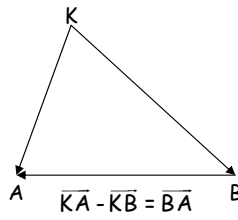
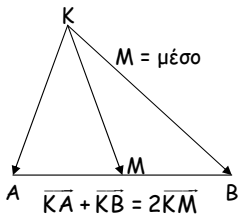


$\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = 2k\pi + \theta \text{ ή } x = 2k\pi + \pi - \theta$
 $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x = 2k\pi + \theta \text{ ή } x = 2k\pi - \theta$
 $\epsilon\phi x = \epsilon\phi\theta \Leftrightarrow x = k\pi + \theta$
 $\sigma\phi x = \sigma\phi\theta \Leftrightarrow x = k\pi + \theta \quad \mu\epsilon \quad k \in \mathbb{Z}$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ					
1. $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$	2. $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$	3. $\sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$	4. $\epsilon\phi\omega\sigma\phi\omega = 1$	5. $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2\omega}$	6. $\eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\phi^2\omega}{1 + \epsilon\phi^2\omega}$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΓΩΝΙΩΝ	
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta,$ $\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$ $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}, \quad \sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}$	$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta,$ $\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$ $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}, \quad \sigma\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}$
ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ 2x - ΤΥΠΟΙ ΑΠΟΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΥ	
$\eta\mu 2x=2\eta\mu x\cos x$	$\sin 2x = \begin{cases} \sin^2 x - \eta\mu^2 x \\ 2\sin^2 x - 1 \\ 1 - 2\eta\mu^2 x \end{cases} \quad \varepsilon\varphi 2x = \frac{2\varepsilon\varphi x}{1-\varepsilon\varphi^2 x}$
$\eta\mu^2 x = \frac{1-\sin 2x}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1+\sin 2x}{2} \quad \varepsilon\varphi^2 x = \frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x} \quad \eta\mu 2x = \frac{2\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi^2 x} \quad \sin 2x = \frac{1-\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$	
ΠΡΟΟΔΟΣ	
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ	ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ
$a_{v+1}=a_v+w$ (ορισμός) $w = a_{v+1}-a_v$ (διαφορά) $a_v = a_1+(v-1)w$ (γενικός όρος) $\beta = \frac{a+\gamma}{2}$ (αριθμητικός μέσος) $S_v = \frac{v}{2} (a_1+a_v)$ ή $S_v = \frac{v}{2} [2a_1+(v-1)w]$	$a_{v+1}=a_v \cdot \lambda$ (ορισμός) ($\lambda \neq 0$) $\lambda = \frac{a_{v+1}}{a_v}$ (λόγος) $a_v = a_1 \cdot \lambda^{v-1}$ (γενικός όρος) ($a_1 \neq 0$) $\beta = \sqrt{a\gamma}$ (γεωμετρικός μέσος) $S_v = a_1 \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1}$ ($\lambda \neq 1$) Αν $\lambda=1$ τότε $S_v = va_1$
ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ	
Εκθετική Συνάρτηση	Λογαριθμική Συνάρτηση
$f(x)=a^x, a>1$ 	$f(x)=a^x, 0<a<1$ 
$f(x)=\log_a x, a>1$ 	$f(x)=\log_a x, 0<a<1$ 
Το σύμβολο: $\log_a y$ έχει νόημα όταν $y>0$ και $0<a\neq 1$	
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ	
<ol style="list-style-type: none"> $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ για $a>0, a\neq 1$ και $x>0$ $\log_a 1=0, \log_a a=1$, για κάθε $a>0, a\neq 1$ $a^{\log_a x} = x, \log_a a^x = x$ $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, για κάθε $x, y>0$ και $0<a\neq 1$ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$, για κάθε $x, y>0$ και $0<a\neq 1$ $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$, για κάθε $x>0, k \in \mathbb{R}$ και $0<a\neq 1$ 	<p>Σημαντικός τύπος για κάθε $x \in \mathbb{R}_+, \ln x \leq x - 1$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^{\ln x} = x \bullet a = e^{\ln a}, a>0 \bullet$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_+, a^x = e^{x \ln a}$ </div> <p>Δεκαδικοί Λογάριθμοι Φυσικοί Λογάριθμοι $\log_{10} \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$ $\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$</p> <p>Αλλαγή βάσης Αν $a, \beta>0$ με $a, \beta \neq 1$, τότε $\forall \theta>0$ ισχύει: $\log_\beta \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta}$</p>

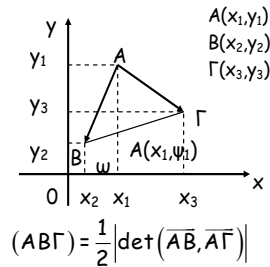
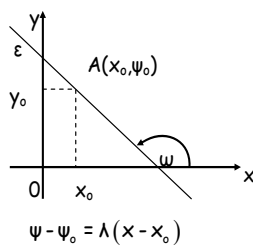
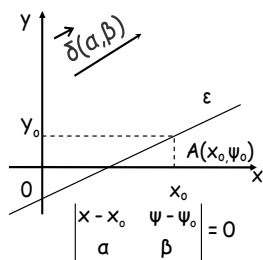
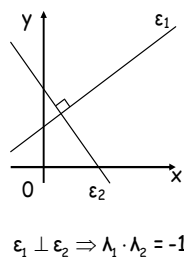
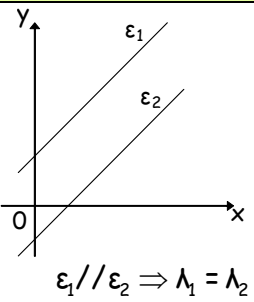
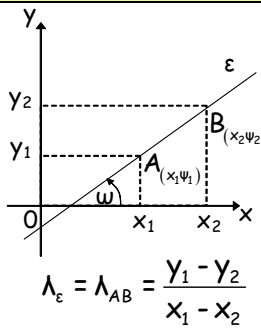
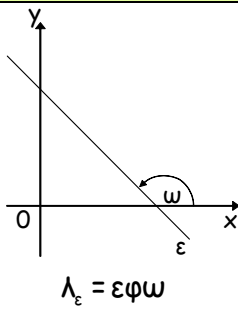
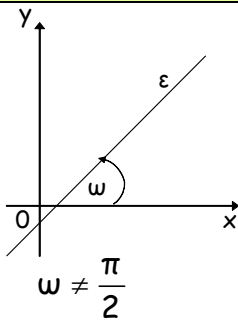
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ



$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = |\vec{a}|^2$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{b}$
 $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{v}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{v}$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ με $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$
 $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ή $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$
 $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

$A(x_1, \psi_1)$ $B(x_2, \psi_2)$
 $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (\psi_1 - \psi_2)^2}$

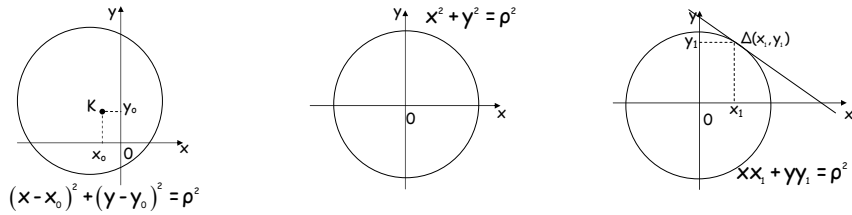
Η ΕΥΘΕΙΑ



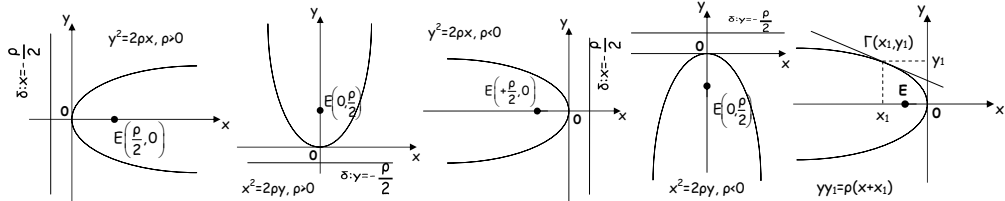
ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Κύκλος

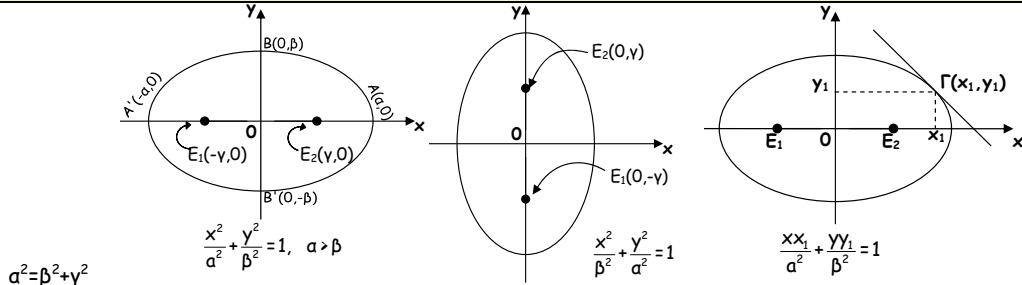
ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ ΚΕΝΤΡΟ $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$



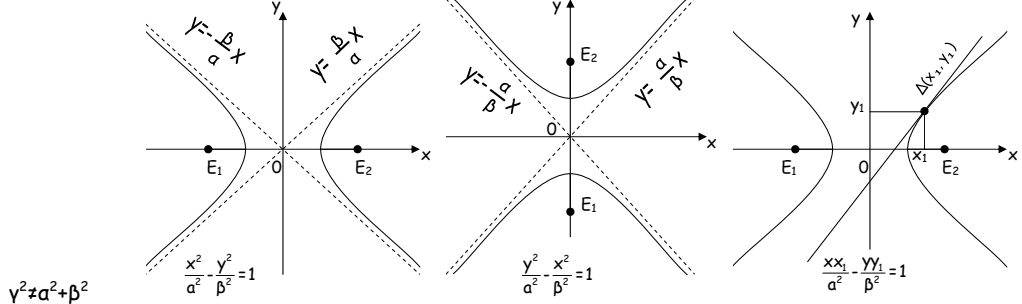
Παραβολή



Έλλειψη



Υπερβολή



ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

$a, \beta \in \mathbb{Z}$ $\beta \neq 0$ $a = k\beta + u$ $0 \leq u < \beta$

Άρτιος: $a = 2k$ **Περιττός:** $a = 2k + 1$

a : περιττός τότε $a^2 = 8\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

$\beta/a \Leftrightarrow a = k\beta$ ή $a = \text{πολ}\beta$ $k \in \mathbb{Z}$

$\left. \begin{matrix} a/\beta \\ \beta/a \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow a = \beta$ ή $a = -\beta$

$a/\beta \Rightarrow a/\lambda\beta$

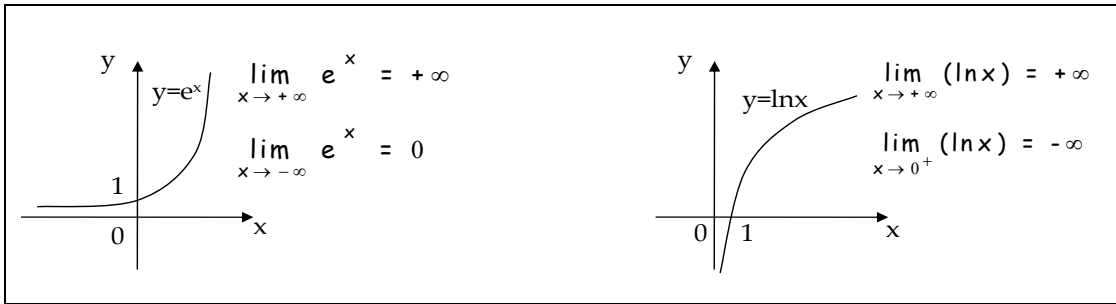
a/β και $a/\gamma \Rightarrow a/(\lambda\beta + \mu\gamma)$ $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$

$a/\beta \Rightarrow |a| \leq |\beta|$, $\beta \neq 0$

a/β και $\beta/\gamma \Rightarrow a/\gamma$

ΟΡΙΑ

Επιτρεπτές πράξεις	Μη επιτρεπτές πράξεις	Συμπεριφορά συναρτήσεων στο άπειρο
$+\infty + \infty = +\infty$	$(+\infty) + (-\infty)$	Για κάθε φυσικό n ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } n = \text{ΑΡΤΙΟΣ} \\ -\infty, & \text{αν } n = \text{ΠΕΡΙΤΤΟΣ} \end{cases}$
$+\infty + \lambda = +\infty$	$(-\infty) + (+\infty)$	
$-\infty - \infty = -\infty$	$(-\infty) - (-\infty)$	
$(-\infty) + \lambda = -\infty$	$0 \cdot (+\infty)$ $0 \cdot (-\infty)$	
$(+\infty)(-\infty) = -\infty$		
$(+\infty)(+\infty) = +\infty$		



ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

	Συνάρτηση	Παράγωγος	Αντίστοιχη σύνθετη	Παράγωγος
1.	$f(x)=c, c \in \mathbb{R}$	$f'(x)=0$		
2.	$f(x)=x^a, a \in \mathbb{R}$	$f'(x)=ax^{a-1}$	$f(x)=g^a(x)$	$f'(x)=a \cdot g^{a-1}(x) \cdot g'(x)$
3.	$F(x)=\sqrt{x}, x \geq 0$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$	$f(x)=\sqrt{g(x)}, g(x) \geq 0$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x), g(x) > 0$
4.	$f(x)=\eta\mu x$	$f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$f(x)=\eta\mu(g(x))$	$f'(x)=\sigma\upsilon\nu(g(x)) \cdot g'(x)$
5.	$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$f'(x)=-\eta\mu x$	$f(x)=\sigma\upsilon\nu g(x)$	$f'(x)=-\eta\mu g(x) \cdot g'(x)$
6.	$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	$f(x)=e^{g(x)}$	$f'(x)=e^{g(x)} \cdot g'(x)$
7.	$f(x)=\ln x, x > 0$	$f'(x)=\frac{1}{x}$	$f(x)=\ln g(x), g(x) > 0$	$f'(x)=\frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$
8.	$f(x)=\varepsilon\phi x, \sigma\upsilon\nu x \neq 0$	$f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$f(x)=\varepsilon\phi g(x), \sigma\upsilon\nu g(x) \neq 0$	$f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 g(x)} \cdot g'(x)$
9.	$f(x)=\sigma\phi x, \eta\mu x \neq 0$	$f'(x)=-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$f(x)=\sigma\phi g(x), \eta\mu g(x) \neq 0$	$f'(x)=-\frac{1}{\eta\mu^2 g(x)} \cdot g'(x)$
10.	$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f(x)=\frac{1}{g(x)}$	$f'(x)=-\frac{1}{g^2(x)} \cdot g'(x)$
11.	$f(x)=a^x, a > 0$	$f'(x)=a^x \ln a$	$f(x)=a^{g(x)}$	$f'(x)=a^{g(x)} \ln a \cdot g'(x)$
12.	$f(x)=x^x, x > 0$	$f'(x)=(e^{x \ln x})'$	$f(x)=[h(x)]^{g(x)}$	$f'(x)=(e^{g(x) \ln h(x)})'$

Κανόνες Παραγωγίσιμης

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

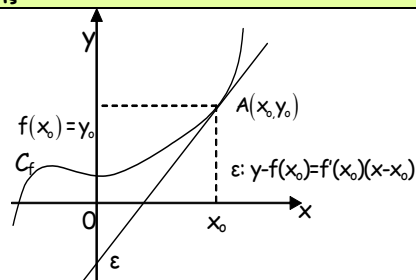
$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

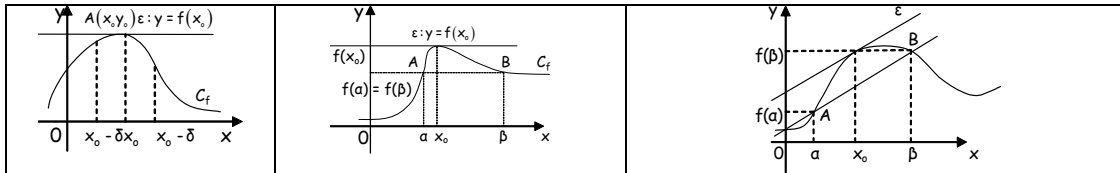
$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$



ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT	ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE	ΘΕΩΡΗΜΑ LAGRANGE (Μ.Τ)
ΥΠΟΘ.: <ul style="list-style-type: none"> Υπάρχει η $f'(x_0)$ x_0 εσ. σημείο του $\Delta=(x_0-\delta, x_0+\delta)$ $f(x_0)$: τοπικό ακρότατο ΣΥΜΠ.: $f'(x_0)=0$	ΥΠΟΘ.: <ul style="list-style-type: none"> Η f συνεχής στο $[a, \beta]$ Η f παραγωγίσιμη τουλάχιστον στο (a, β) $f(a)=f(\beta)$ ΣΥΜΠ.: Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$	ΥΠΟΘ.: <ul style="list-style-type: none"> Η f συνεχής στο $[a, \beta]$ Η f παραγωγίσιμη τουλάχιστον στο (a, β) ΣΥΜΠ.: Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$



ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ		
1. $\int 0 dx = c$	5. $\int \sin x dx = -\cos x + c$	9. $\int e^x dx = e^x + c$
2. $\int 1 dx = x + c$	6. $\int \cos x dx = \sin x + c$	
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	7. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
4. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$	8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ $z = x + yi = (x, y), x, y \in \mathbb{R}$

i. Αν $x=0$ τότε $z = yi \in \mathbb{I}$

ii. Αν $y=0$ τότε $z = x \in \mathbb{R}$

- ♦ $(\alpha, \beta) + (x, \psi) = (\alpha + x, \beta + \psi)$
- ♦ $(\alpha, \beta) - (x, \psi) = (\alpha - x, \beta - \psi)$
- ♦ $(\alpha, \beta)(x, \psi) = (\alpha x - \beta \psi, \alpha \psi + \beta x)$
- ♦ $(\alpha, \beta) : (x, \psi) = \left(\frac{\alpha x + \beta \psi}{x^2 + \psi^2}, \frac{\beta x - \alpha \psi}{x^2 + \psi^2} \right)$

$$(0, 1) = i$$

$$(\alpha, \beta) = \alpha + \beta i \quad i^v = \begin{cases} 1, v = 4\kappa \\ i, v = 4\kappa + 1 \\ -1, v = 4\kappa + 2 \\ -i, v = 4\kappa + 3 \end{cases} \quad v \in \mathbb{Z}$$

$$i^2 = -1$$

$$|\alpha + \beta i| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\bar{\bar{z}} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}, \quad \bar{\bar{-z}} = -z \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}, \quad \overline{(\bar{z})} = z$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad \overline{(z^v)} = (\bar{z})^v, \quad v \in \mathbb{Z}$$

$$|z| \geq 0, \quad |z| = |\bar{z}| = |-z|, \quad \left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z^v| = |z|^v, \quad \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

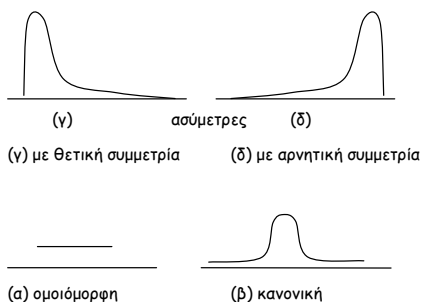
$$f_i = \frac{v_i}{v} \quad 0 \leq f_i \leq 1 \quad \sum_{i=1}^v f_i = f_1 + f_2 + \dots + f_v = 1 \quad v_1 = N_1 \quad v_k = N_k - N_{k-1} \quad f_1 = F_1 \quad f_k = F_k - F_{k-1}$$

$$N_k = v_1 + v_2 + \dots + v_k$$

$$F_k = f_1 + f_2 + \dots + f_k$$

$$\alpha_i = \frac{v_i}{v} 360^\circ = f_i 360^\circ$$

R = μεγαλύτερη παρατήρηση - μικρότερη παρατήρηση



$$\bar{x} = \frac{\sum t_i}{v} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k}{v}$$

$$\bar{x} = \sum x_i f_i$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_v w_v}{w_1 + w_2 + \dots + w_v}$$

$$S^2 = \frac{1}{v} \sum (t_i - \bar{x})^2$$

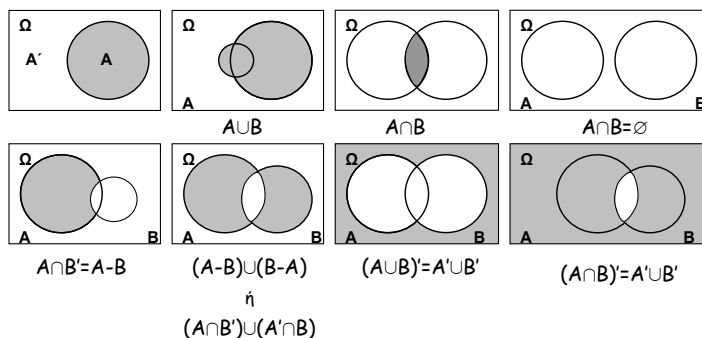
$$S^2 = \frac{1}{v} \left(\sum t_i^2 - \frac{(\sum t_i)^2}{v} \right) = \frac{\sum t_i^2}{v} - \bar{x}^2$$

$$S^2 = \frac{1}{v} \sum (x_i - \bar{x})^2 v_i$$

$$S^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum x_i^2 v_i - \frac{(\sum x_i v_i)^2}{v} \right\}$$

$$S^2 = \frac{\sum x_i^2 v_i}{v} - \bar{x}^2 \quad CV = \frac{S}{\bar{x}}$$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ



- ♦ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$
- ♦ $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$
- ♦ $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_k) = 1$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$$

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_p)$$

- ♦ $P(\Omega) = 1$
- ♦ $P(\emptyset) = 0$

- ♦ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- ♦ $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- ♦ $P(A') + P(A) = 1$
- ♦ $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- ♦ Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \leq P(B)$

ΚΛΑΣΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}$$