Βασικές γνώσεις Μαθηματικών Α’ και Β’ Λυκείου που πρέπει να ξέρουμε για να ξεκινήσουμε τις σπουδές μας στο ΕΑΠ

Επιμέλεια Όμηρος Κορακιανίτης

Άλγεβρα και πράξεις: (ή το μυστικό της επιτυχίας)

- ***Όταν ένα γινόμενο παραγόντων είναι μηδέν τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε;***

  Όταν ένα γινόμενο παραγόντων είναι μηδέν, τότε ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες του πρέπει να είναι μηδέν.

  Για παράδειγμα, $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$ ή $\gamma = 0$.

  $(x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0$ ή $x+2 = 0 \Leftrightarrow$ x-1 ή $x = -2$

- **Όταν ένα κλάσμα είναι μηδέν τι συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε;**

  Ότι ο αριθμητής είναι μηδέν (Προσοχή! Ο παρονομαστής είναι πάντα διαφορετικός από το μηδέν). Για παράδειγμα, $\frac{x^2-3x+2}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2-3x+2 = 0$ και $x \neq 0 \Leftrightarrow x-1$

  ή x =2.

- ***Τι μπορούμε να κάνουμε και στα δύο μέλη μιας ισότητας;***

  α) Μπορούμε να προσθέσουμε και στα δύο μέλη μιας ισότητας τον ίδιο αριθμό. Δηλαδή ισχύει: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

  β) Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη μιας ισότητας με τον ίδιο αριθμό. Δηλαδή ισχύει: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha\cdot\gamma = \beta\cdot\gamma$, $\gamma \neq 0$.

  γ) Μπορούμε να διαιρέσουμε και τα 2 μέλη μιάς ισότητας με τον ίδιο **μη μηδενικό** αριθμό.

  Μην ξεχνάμε ότι διαίρεση είναι πολλαπλασιασμός με τον αντίστροφο!

- ***Τι ονομάζουμε δύναμη α^ν;***

  Δύναμη α^ν με βάση έναν πραγματικό αριθμό α και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό $\nu \geq 2$ είναι ένα γινόμενο ν παραγόντων, που ο καθένας είναι ίσος με τον α

  i) $\alpha^\nu = \alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\ldots\ldots\ldots\alpha$ (ν παράγοντες) δηλαδή ν – φορές.

  ii) Αν $\nu = 1$, τότε ισχύει $\alpha^1 = \alpha$

  iii) Αν $\nu = 0$, και $\alpha \neq 0$, τότε είναι: $\alpha^0 = 1$.

- ***Ποιες είναι οι ιδιότητες των δυνάμεων;***

$\alpha^\kappa\cdot\alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda}$	$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\kappa = \frac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa}$, $\beta \neq 0$	$(\alpha^\kappa)^\lambda = \alpha^{\kappa\lambda} = (\alpha^\lambda)^\kappa$
$\alpha^\kappa:\alpha^\lambda = \alpha^{\kappa-\lambda}$, $\alpha \neq 0$	$(\alpha\cdot\beta)^\kappa = \alpha^\kappa\cdot\beta^\kappa$	$\alpha^{-\kappa} = \frac{1}{\alpha^\kappa}$, $\alpha \neq 0$

- ***Βασικές ταυτότητες:***

α) $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

β) $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

γ) $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$

δ) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

ε) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

στ) $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

η) $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

θ) $\alpha^\nu - \beta^\nu = (\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \ldots\ldots + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1})$

ι) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2\right]$

κ) Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

Προσοχή! Τις ταυτότητες πρέπει να τις βλέπουμε και ως Άραβες (δηλαδή από τα δεξιά προς τα αριστερά), για παράδειγμα, $x^2–9 = x^2–3^2 = (x-3)(x+3)$ και έχουμε κάνει παραγοντοποίηση, δηλαδή γινόμενο παραγόντων.

- ***Πότε λέμε ότι ένας αριθμός α είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό β;***

  Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι μεγαλύτερος από τον β, όταν η διαφορά α-β είναι θετικός αριθμός:

  Ισχύει: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$

- ***Ποιες ιδιότητες ισχύουν στις ανισότητες;***

  i) Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, τότε $\alpha + \beta > 0$ (Το άθροισμα θετικών αριθμών είναι θετικό)

  ii) Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$, τότε $\alpha + \beta < 0$ (Το άθροισμα αρνητικών αριθμών είναι αρνητικό)

  iii) α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} > 0$.

  iv) α, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} < 0$

  v) Για κάθε $\alpha \in R$ ισχύει: $\alpha^2 \geq 0$

- Για τη διάταξη ισχύει: $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$ (μεταβατική ιδιότητα)

- ***Τι μπορούμε να κάνουμε και στα δύο μέλη μιας ανισότητας;***

  i) Μπορούμε να προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό στα μέλη μιας ανισότητας.
  Δηλαδή: Αν $\alpha > \beta$, τότε ισχύει $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$

  ii) Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τα μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο **θετικό** αριθμό, οπότε προκύπτει ανισότητα με την **ίδια φορά**. Δηλαδή:

  Αν $\gamma > 0$ και $\alpha > \beta$, τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$

  iii) Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τα μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο **αρνητικό αριθμό**, οπότε προκύπτει ανισότητα με **αντίθετη φορά**. Δηλαδή:

  Αν $\gamma < 0$ και $\alpha > \beta$, τότε ισχύει $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

Δηλαδή πρέπει να ξέρουμε το πρόσημο του αριθμού με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε και τα 2 μέλη μιάς ανισότητας! (βλέπε π.χ. σελίδα 11)

Παράδειγμα:

Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x+1}{x-1} - 2 \leq \frac{1-x}{x}$ (κλασματική ανίσωση γιατί ο άγνωστος x είναι στον παρονομαστή)

Λύση:

$\frac{x+1}{x-1} - 2 \leq \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} - 2 - \frac{1-x}{x} \leq 0$ (τα κάνουμε ομώνυμα).

$$\Leftrightarrow \frac{x\cdot(x+1) - 2x(x-1) - (1-x)(x-1)}{x\cdot(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2x^2 + 2x - (x - 1 - x^2 + x)}{x\cdot(x-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x\cdot(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow x\cdot(x-1)\cdot(x+1) \leq 0$$

	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
x	-	-	+	+
(x+1)	-	+	+	+
(x-1)	-	-	-	+
x(x+1)(x-1)	-	+	-	+

$x \le -1$ ή $0 \le x \le 1$

Περιορισμοί: $x \ne 0$ και $x \ne 1$. Άρα το σύνολο λύσεων είναι $x \le -1$ ή $0 < x < 1$.

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup (0,1)$

- ***Τι μπορούμε να κάνουμε με δύο ανισότητες;***

  α) Μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη, όταν έχουν **την ίδια φορά**, οπότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή:

  $$\text{Αν } \left.\begin{matrix} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{matrix}\right\}, \text{ τότε } \alpha + \gamma > \beta + \delta$$

  β) Μπορούμε να τις πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη, όταν έχουν **την ίδια φορά** και **θετικούς όρους**, οπότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή:

  $$\text{Αν } \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0 \text{ και } \left.\begin{matrix} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{matrix}\right\}, \text{ τότε ισχύει } \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$$

- Αν $\alpha, \beta \ge 0$ και $\nu \in N$, τότε ισχύουν:

  α) $\alpha \ge \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu \ge \beta^\nu$ και β) $\alpha > \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{a}\ \sqrt[\nu]{\beta}$.

- Αν δύο αριθμοί α, β είναι ομόσημοι, τότε ο αντίστροφος του μεγαλύτερου είναι μικρότερος από τον αντίστροφο του μικρότερου, δηλαδή:

  Αν α, β ομόσημοι και $\alpha > \beta$, τότε $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{\beta}$

- Τι ονομάζουμε νιοστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α;

  Είναι ο μη αρνητικός αριθμός, που όταν υψωθεί στη ν, δίνει α. Δηλαδή:

  $$\sqrt[\nu]{a} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^\nu = \alpha, \qquad x \ge 0$$

- ***Ιδιότητες των ριζών.***

  Η ρίζα είναι δύναμη! Πράγματι, $\sqrt{\alpha} = \alpha^{1/2}$

  1) Αν $\alpha \ge 0$ τότε $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha$

  2) $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$, αν ν άρτιος και $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$, αν ν περιττός. πχ $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$, $\sqrt[3]{\alpha^3} = \alpha$

  3) Αν $\alpha, \beta \ge 0$, τότε: $\sqrt[\nu]{a} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$

  4) Αν $\alpha, \beta \ge 0$ με $\beta \ne 0$, τότε: $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

  5) Αν $\alpha, \beta \ge 0$ και κ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε:
  $\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\kappa$ και $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$

  6) Αν $\alpha \ge 0$ και μ,ν ρ θετικοί ακέραιοι, τότε: $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}} = \sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha}$ 7) $\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

  8) Αν $\alpha > 0$ και $\mu \in Z$ και ν θετικός ακέραιος, τότε: $\alpha^{\mu/\nu} = \sqrt[\nu]{a^\mu}$

  Δεν χρειάζεται να ξέρετε «απ' έξω» αυτές τις ιδιότητες!! **Είναι ίδιες με αυτές των δυνάμεων**, πχ $\sqrt[\mu\nu]{a} = a^{\frac{1}{\mu\nu}} = \alpha^{\frac{1}{\mu}\frac{1}{\nu}} = \left(a^{\frac{1}{\mu}}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{1/\mu}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}$

Προσοχή! Όταν έχουμε εξισώσεις με ρίζες για να τις ¨διώξουμε¨ υψώνουμε στο τετράγωνο. Με τον τρόπο αυτόν άθελά μας εισάγουμε και νέες ¨ανεπιθύμητες¨ ρίζες. Για τον λόγο αυτόν ελέγχουμε μία-μία τις ρίζες που βρήκαμε αν επαναληθεύουν την αρχική εξίσωση, αν όχι τις απορρίπτουμε.

Παράδειγμα: Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x} = 6 - x$

Περιορισμοί: Θα πρέπει $x \geq 0$. Άρα $(\sqrt{x})^2 = |x| = x$ και η αρχική εξίσωση γράφεται:

$(\sqrt{x})^2 = (6-x)^2 \Rightarrow x = 36 - 12x + x^2 \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow x = 4$ ή x =9.

Επαναλήθευση: $\sqrt{4} = 6 - 4$ ισχύει. Άρα δεκτή ρίζα x = 4.

$\sqrt{9} = 3 \neq 6 - 9$ δεν ισχύει. Απορρίπτεται!

- ***Πως παραγοντοποιούμε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$;***

Προσοχή! Το τριώνυμο εμφανίζεται παντού! Είναι το αλάτι των μαθηματικών!

α) Αν $\Delta > 0$, τότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες, έστω $\rho_1 < \rho_2$ και τρέπεται σε γινόμενο: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$

β) Αν $\Delta = 0$, τότε το τριώνυμο έχει μια διπλή ρίζα, έστω την ρ και έχουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-\rho)^2$$

γ) Αν $\Delta < 0$, τότε το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες και δεν παραγοντοποιείται.

- ***Ποιο το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$ και $x \in R$;***

Α) Αν $\Delta > 0$, τότε έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις $x_1 < x_2$ και έχουμε:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		ομόσημο του α	0	**ετερόσημο του α**	0	ομόσημο του α	

Επομένως το τριώνυμο έχει το πρόσημό του α (ομόσημο του α) όταν το x παίρνει τιμές εκτός του διαστήματος των ριζών και **αντίθετο πρόσημο (ετερόσημο του α) <u>μόνο</u> όταν το x παίρνει τιμές ανάμεσα στις ρίζες του τριωνύμου.**

Β) Αν $\Delta = 0$, τότε για το πρόσημο του f(x) έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		$-\frac{\beta}{2\alpha}$		$+\infty$
f(x)		ομόσημο του α	0	ομόσημο του α	

Επομένως το f(x) είναι ομόσημο του α σε όλο το R εκτός του $-\frac{\beta}{2\alpha}$, όπου μηδενίζεται.

Γ) Αν $\Delta < 0$, τότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του α για κάθε $x \in R$.

Συνοψίζοντας, η μόνη περίπτωση που το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α είναι όταν $x_1 < x < x_2$ όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου.

Άθροισμα και γινόμενο ριζών τριωνύμου:

Για κάθε τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = f(x)$ με ρίζες x_1, x_2 ισχύει $x_1 + x_2 = -\beta/\alpha$ και $x_1 \cdot x_2 = \gamma/\alpha$

- **Κλασματικές εξισώσεις**: Όταν ο άγνωστος x βρίσκεται στον παρονομαστή.
Προσοχή! Εδώ (όπως και στις εξισώσεις με ρίζες) υπάρχουν περιορισμοί!

Παράδειγμα: Να λύσετε την εξίσωση
$$\frac{20}{x+2}-1=\frac{20}{x+3}$$
Λύση:
Περιορισμοί: $x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2 \quad x+3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -3$
Πολλαπλασιάζουμε την αρχική εξίσωση με το ΕΚΠ (ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο) των παρονομαστών, $(x+2)(x+3)\cdot\frac{20}{x+2}-(x+2)(x+3)\cdot 1=(x+2)(x+3)\frac{20}{x+3}\Leftrightarrow$
$$20(x+3)-(x+2)(x+3)=20(x+2)\Leftrightarrow x^2+5x-14=0\Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=-7$$
και οι δύο δεν ανήκουν στους παραπάνω περιορισμούς, άρα είναι δεκτές.

-Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού
Ορισμός:
$|a| = α$, αν $α \geq 0$
$-α$, αν $α < 0$

-Ιδιότητες των απόλυτων τιμών
1) $|a| \geq 0$
$|a| \geq α$ και $|a| \geq -α$ ενώ $|a|^2 = α^2$

2) Αν $θ > 0$, τότε:
$|x| = θ \Leftrightarrow x = θ$ ή $x = -θ$
$|x| = |a| \Leftrightarrow x = α$ ή $x = -α$

3) Αν $θ > 0$, τότε: $|x| < θ \Leftrightarrow -θ < x < θ$

4) Αν $θ > 0$, τότε: $|x| > θ \Leftrightarrow x < -θ$ ή $x > θ$

5) $\sqrt{α^2} = |α|$
Προσοχή! η ρίζα και το τετράγωνο φεύγουν και αφήνουν πίσω τους…την απόλυτη τιμή!
Σε ορισμένες περιπτώσεις για να διώξουμε την απόλυτη τιμή «συμφέρει» να υψώσουμε στο τετράγωνο, για παράδειγμα η εξίσωση

$$|x-1|+2=x\Leftrightarrow|x-1|=x-2\Leftrightarrow|x-1|^2=(x-2)^2\Leftrightarrow x^2-2x+1=x^2-4x+4\Leftrightarrow 2x=3\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

ενώ σε άλλες όχι, για **παράδειγμα:**
Να λυθεί η εξίσωση $|x-1|+|x-2|=2$

Λύση: Εδώ φτιάχνουμε πινακάκι με τις ρίζες κάθε παράγοντα (1 και 2)

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	0	$x-1$		$x-1$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$
$\lvert x-1\rvert+\lvert x-2\rvert$	$-2x+3$		1		$2x-3$

Άρα έχουμε:

- Για $x<1$: $-2x+3=2 \Leftrightarrow -2x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}<1$ δεκτή ρίζα
- Για $1 \le x \le 2$: $1=2$ αδύνατη.
- Για $x>2$: $2x-3=2 \Leftrightarrow 2x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}>2$ δεκτή ρίζα.

Παραγοντοποίηση πολυωνύμου:
Για να γράψουμε ένα πολυώνυμο ως γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων (x-ρ) θα χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω 2 θεωρήματα:

Θεώρημα 1^0:
Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x-ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή αν και μόνο αν P(ρ)=0

Θεώρημα 2^0:
Αν ο ακέραιος ρ (≠0) είναι ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$$

με ακέραιους συντελεστές $\alpha_0, \alpha_{1,\ldots,}\alpha_\nu$ τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Με άλλα λόγια πρώτα ψάχνουμε στους διαιρέτες του σταθερού όρου, ελπίζοντας να βρούμε κάποια ρίζα και μετά κάνουμε πολυωνυμική διαίρεση, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα:
Να πραγματοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

Λύση: Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του 2 δηλαδή $\pm 1, \pm 2$. Με δοκιμές βρίσκουμε $P(2) = 0$ άρα το $x - 2$ είναι παράγοντας (δηλαδή διαιρεί ακριβώς) του P(x).
Στη συνέχεια κάνουμε πολυωνυμικές διαιρέσεις:

$x^3 - 3x^2 + x + 2$	$x-2$	
$-x^3 + 2x^2$	$x^2 - x - 1$	Διαιρούμε το x^3 με το x ->x^2
$-x^2 + x + 2$		Πολλαπλασιάζουμε και αλλάζουμε πρόσημο
$+x^2 - 2x$		Προσθέτουμε
$-x + 2$		
$+x - 2$		
0		Υπόλοιπο 0 (τέλεια διαίρεση)

Άρα $P(x) = (x-2)(x^2-x-1)$

Το τριώνυμο $x^2 - x - 1$ έχει ρίζες $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ και $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ άρα τελικά

$P(x) = (x-2)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ή $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

- Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Έστω ένα γραμμικό σύστημα (2x2, δηλαδή 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους):

$$\begin{aligned} \alpha_1 x + \beta_1 y &= \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y &= \gamma_2 \end{aligned} \quad (\Sigma) \text{ με } \alpha,\beta,\gamma \in R$$

Η πιο απλή μέθοδος επίλυσης του είναι η αντικατάσταση, δηλαδή λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς τον έναν άγνωστο (π.χ. το y) και αντικαθιστούμε στην δεύτερη.
Μια άλλη μέθοδος επίλυσης είναι με ορίζουσες (ενδείκνυται όταν έχουμε **παραμετρικά συστήματα**)

$D = \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$, $\quad Dx = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$, $\quad Dy = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$

Τότε: α) αν $D \neq 0$ το (Σ) έχει μοναδική λύση $x = \frac{Dx}{D}$, $y = \frac{Dy}{D}$

β) αν $D = 0$ και ($Dx \neq 0$ ή $Dy \neq 0$) τότε το (Σ) είναι αδύνατο

γ) αν $D = 0$ και $Dx = 0$ και $Dy = 0$ τότε το (Σ) είναι αόριστο(απαιτείται επιπλέον διερεύνηση)

Παράδειγμα:

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda - 1 \\ \lambda^2 x - 2y = \lambda \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές και οι σταθεροί όροι δεν είναι όλοι συγκεκριμένοι αριθμοί αλλά εξαρτώνται από το λ (**παράμετρος**). Πρέπει επομένως, για τις διάφορες τιμές του λ, να εξετάσουμε πότε προκύπτει σύστημα που έχει μοναδική λύση την οποία και να βρούμε ή πότε προκύπτει σύστημα αδύνατο ή με άπειρες λύσεις: Η εργασία αυτή λέγεται διερεύνηση. Έχοντας υπόψη τον παρακάτω πίνακα, ακολουθούμε τα εξής βήματα

- **Βήμα 1: Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y:**

Έχουμε: $D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda^2 & -2 \end{vmatrix} = -2\lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda-2)$

$Dx = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} = -2(\lambda-1) + \lambda = 2 - \lambda$

$Dy = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda - 1 \\ \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda^2(\lambda-1) = \lambda^2(1-\lambda+1) = \lambda^2(2-\lambda)$

- Βήμα 2: Βρίσκουμε τις τιμές της παραμέτρου, για τις οποίες είναι D = 0

Έχουμε: $D = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 2$

- **Βήμα 3: Εξετάζουμε περιπτώσεις ανάλογα με τις τιμές της παραμέτρου λ.**

i) Αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 2$, τότε είναι $D \neq 0$ και επομένως το σύστημα έχει μια και μοναδική λύση, την :

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{2-\lambda}{\lambda(\lambda-2)} = \frac{-(\lambda-2)}{\lambda(\lambda-2)} = -\frac{1}{\lambda}$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{\lambda^2(2-\lambda)}{\lambda(\lambda-2)} = \frac{-\lambda^2(\lambda-2)}{\lambda(\lambda-2)} = -\lambda$$

ii) Αν λ = 0, τότε το σύστημα γίνεται:

$\begin{cases} 0x - y = -1 \\ 0x - 2y = 0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ που είναι αδύνατο

iii) Αν λ = 2, τότε το σύστημα γίνεται:

$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ που έχει άπειρες λύσεις

Επειδή 2x – y = 1 $\Leftrightarrow$ y = 2x -1, λύσεις του συστήματος στην περίπτωση αυτήν είναι όλα τα ζεύγη της μορφής (x, 2x-1), όπου x οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

- ***Πρόοδοι:***
- Αριθμητική πρόοδος (ΑΠ), είναι η ακολουθία των αριθμών (όρων) $α_1, α_2, α_3,\ldots,α_ν,\ldots$ όπου ο κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο συν κάποιον σταθερό μη μηδενικό αριθμό που λέγεται διαφορά ω, δηλαδή

  $α_ν = α_1 + (ν-1) \cdot ω$ (με $ω \neq 0$) είναι ο γενικός (ν- οστός) όρος

  και $S_ν = \frac{\nu}{2} = [2a_1 + (\nu-1)\omega] = \frac{\alpha_1 + \alpha_\nu}{2} \cdot ν$ είναι το άθροισμα των ν-πρώτων όρων της ΑΠ

- Γεωμετρική Πρόοδος (ΓΠ) είναι η ακολουθία $α_1, α_2, α_3,\ldots.α_ν,\ldots$ όπου ο κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο επί κάποιον σταθερό ($\neq 0$ και $\neq 1$) αριθμό, δηλαδή

  $α_ν = α_1 \cdot λ^{ν-1}$ είναι ο γενικός (ν- οστός) όρος και $S_ν = \frac{a_1(\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}$ είναι το άθροισμα των ν-πρώτων όρων της ΓΠ και $S\infty = \frac{a_1}{1-\lambda}$ είναι το άθροισμα απείρων πρώτων όρων της ΓΠ με $-1 < λ < 1$ και $λ \neq 0$.

Εκθετική συνάρτηση

Έστω α ένας θετικός αριθμός. Για κάθε xεIR ορίζεται η δύναμη $α^x$ (βλέπε σελ2). Επομένως αντιστοιχίζοντας κάθε xεIR στη δύναμη $α^x$, ορίζουμε τη συνάρτηση:

f: IR$\rightarrow$IR με $f(x) = α^x$,

η οποία, στην περίπτωση που είναι $α \neq 1$, λέγεται εκθετική συνάρτηση με βάση το α.

(Αν είναι α = 1, τότε έχουμε τη σταθερή συνάρτηση f(x) = 1.)

Η συνάρτηση αυτή, καθώς και κάθε συνάρτηση της μορφής

$f(x) = α^x$ με $α > 1$,

έχει τις εξής ιδιότητες:

- Έχει πεδίο ορισμού το IR. (βλέπε σελ.16)
- Έχει σύνολο τιμών (βλέπε σελ.16) το διάστημα $(0, +\infty)$ των θετικών πραγματικών αριθμών.
- Είναι **γνησίως αύξουσα** στο IR. Δηλαδή για κάθε x_1, x_2εIR ισχύει :

  αν $x_1 < x_2$, τότε $α^{x1} < α^{x2}$ που χρησιμοποιείται στην επίλυση ανισώσεων
- Η γραφική της παράστασης τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Α(0,1) και έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα των x.

και επιπλέον ΟΛΕΣ τις ιδιότητες των δυνάμεων που παρουσιάσαμε παραπάνω (σελ.2)

Παρόμοιες ιδιότητες έχει και η συνάρτηση f(x) = α^x με **0<α<1**, μόνο που είναι **γν. φθίνουσα** στο R και έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα των x.

Σχόλιο: Από τη μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης f(x) = α^x με $0<\alpha\neq 1$, προκύπτει ότι:

αν $x_1 \neq x_2$ τότε $a^{x1} \neq a^{x2}$

οπότε, με απαγωγή σε άτοπο, έχουμε ότι :

αν $a^{x1} = a^{x2}$, τότε $x_1 = x_2$.

Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία: $a^{x1} = a^{x2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ που εφαρμόζεται στην επίλυση εξισώσεων

Παραδείγματα:

1^o Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $2^{3x} = \frac{1}{64}$ ii) $9^x - 8\cdot 3^x - 9 = 0$

Λύση

i) Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$2^{3x} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-6} \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -2$ [Επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι 1-1]

ii) Η εξίσωση γράφεται

$3^{2x} - 8\cdot 3^x - 9 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 8\cdot 3^x - 9 = 0$ επειδή $9=3^2$ και $(3^2)^x=3^{2x}$

Αν θέσουμε 3^x = y, αυτή ισοδυναμεί με το τριώνυμο $y^2 - 8y - 9 = 0$ το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 9. Επομένως η αρχική εξίσωση έχει ως λύσεις τις λύσεις των εξισώσεων: $3^x = -1$ και $3^x = 9$. Απ'αυτές η πρώτη είναι αδύνατη, αφού $3^x > 0$, ενώ η δεύτερη γράφεται $3^x = 3^2$ και έχει ρίζα το x = 2, που είναι και μοναδική ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

2^o Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $3^{x^2-3x} > \frac{1}{9}$ ii) $(\frac{1}{2})^{x^2+x} < \frac{1}{4}$

Λύση

i) Έχουμε

$$3^{x^2-3x} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x^2-3x} > 3^{-2} \Leftrightarrow x^2 - 3x > -2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \quad \text{ή} \quad x > 2$$

διότι η συνάρτηση 3^x είναι γν. αύξουσα σύμφωνα με τα παραπάνω.

ii) Έχουμε

$$(\frac{1}{2})^{x^2+x} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow (\frac{1}{2})^{x^2+x} < (\frac{1}{2})^2 \Leftrightarrow x^2 + x > 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -2 \quad \text{ή}\ x > 1$$

διότι η συνάρτηση $(1/2)^x$ είναι γν. φθίνουσα σύμφωνα με τα παραπάνω.

Λογάριθμοι:

Έννοια λογάριθμου: Σε ποιόν αριθμό πρέπει να υψώσω το e ώστε να πάρω x ; Η απάντηση είναι y. Ομοίως, και πιο εύκολα κατανοητό, όταν η βάση είναι κάποιος άλλος θετικός αριθμός ($\neq 1$) πχ 2, δηλαδή, σε ποιόν αριθμό πρέπει να υψώσω το 2 ώστε να πάρω 8; Η απάντηση είναι $\log_2 8 = 3$ γιατί $2^3 = 2\cdot 2\cdot 2=8$! **Γι'αυτό η λογαριθμική είναι η αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής!**

Ιδιότητες λογαρίθμων:

$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$

$\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

$\ln x^{\kappa} = \kappa \cdot \ln x$

$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1$

Σε όλες τις ιδιότητες $x, y > 0$.
Οι ίδιες ιδιότητες ισχύουν και για log (δηλαδή λογάριθμο με βάση το 10).

Ορισμός – βασική έννοια λογαρίθμου: $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$ (και $\log x = y \Leftrightarrow x = 10^y$)
(το e είναι η βάση του λογαρίθμου, δηλαδή $\log_e x = \ln x$. Επίσης είναι η βάση και της εκθετικής συνάρτησης. Ομοίως για το 10 όταν έχουμε log)

Που χρησιμοποιούνται οι λογάριθμοι;
Παντού, αλλά κυρίως στην ανάλυση. Για παράδειγμα στο **2^0 θέμα των Πανελλαδικών εξετάσεων 2004 στα Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου** έπρεπε να λύσει ο μαθητής την εξίσωση:
$2x\ln x + x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (2\ln x + 1) = 0$.

- ***Λογάριθμοι και εξισώσεις – ανισώσεις.***

Επειδή οι συναρτήσεις $y = \ln x$ και $y = \log x$ είναι **γνησίως αύξουσες** ισχύει $x_1 > x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 > \ln x_2$ (ομοίως για log). Με την ιδιότητα αυτή λύνουμε λογαριθμικές ανισότητες.
Επίσης ισχύει $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 = \ln x_2$ δηλαδή είναι συναρτήσεις «1-1». Με την ιδιότητα αυτή λύνουμε λογαριθμικές εξισώσεις όπως στα πιο κάτω παραδείγματα.
Για παράδειγμα στις **Πανελλαδικές 2004, Μαθηματικά ΓΠ Β' Λυκείου 4^0 Θέμα** καταλήγαμε στην ανισότητα $\frac{1}{2} \le (\frac{1}{5})^x \le 1 \Leftrightarrow \ln\frac{1}{2} \le \ln(\frac{1}{5})^x \le \ln 1$ γιατί η συνάρτηση $y = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα. Άρα $\ln\frac{1}{2} \le x\ln\frac{1}{5} \le 0$ Όμως το $\ln\frac{1}{5} < 0$ γιατί $\frac{1}{5} < 1$ οπότε αν διαιρέσω παντού με $\ln\frac{1}{5}$ παίρνω $0 \le x \le \frac{\ln 2}{\ln 5}$ (αλλάζει η φορά!)

Επίσης στη **Φυσική Γενικής Παιδείας στις Πανελλαδικές Εξετάσεις 2004 στο Θέμα 4** που αναφερόταν στη διάσπαση ραδιενεργών πυρήνων καταλήγαμε στην εξίσωση

$$\frac{N_0 - N}{N} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{N_0}{N} - 1 = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{N_0}{N} = 1 + \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{N_0 1}{N_0 e^{-\lambda t}} = \frac{9}{8}$$

την οποία έπρεπε να λύσουμε ως προς t:

$$e^{\lambda t} = \frac{9}{8} \Leftrightarrow \lambda t = \ln\frac{9}{8} \Leftrightarrow t = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{9}{8}$$

Άλλο **παράδειγμα από Πανελλαδικές εξετάσεις** είναι το ακόλουθο:

Για την μελέτη των ακροτάτων (τοπικό μέγιστο ή/και τ. ελάχιστο) μίας συνάρτησης καταλήγαμε στην επίλυση της εξίσωσης x(2lnx+1)=0

$\Leftrightarrow$ x = 0 ή 2lnx + 1 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 0 ή lnx = $-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ x = 0 ή x = $e^{-1/2}$. Η πρώτη ρίζα απορρίπτεται γιατί το πεδίο ορισμού της lnx είναι το (0, $+\infty$). Άρα καταλήγουμε στη δεύτερη ρίζα x = $e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Στη συνέχεια για να μελετήσουμε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία (γν. αύξουσα ή φθίνουσα) έπρεπε να λύσουμε την ανίσωση: $x\cdot(2\ln x+1) > 0$.

$\Leftrightarrow$ 2lnx + 1 $>$ 0 αφού ήδη ξέρουμε ότι $x \in (0, +\infty)$ δηλαδή x $>$ 0.

Άρα έχουμε $2\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{1}{2}$

Εδώ πρέπει να θυμηθούμε ότι η συνάρτηση y = lnx είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή $\ln\alpha > \ln\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

$\ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-1/2} \Leftrightarrow x > e^{-1/2} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{e}}$

(το νούμερο αυτό φάνηκε άσχημο στους μαθητές και σε ορισμένους καθηγητές αλλά ο αριθμός e είναι από τους σημαντικότερους στην ιστορία των Μαθηματικών και εμφανίζεται σε μία από τις πιο όμορφες, σημαντικές και πλήρεις εξισώσεις την $e^{i\pi} + 1 = 0$!).

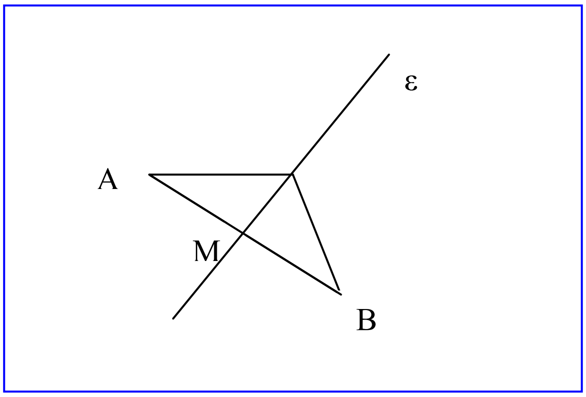
- Ευθεία και Κωνικές Τομές:

Γραμμή	Εξίσωση	Παρατηρήσεις
Ευθεία	$y = \lambda x + \beta$	Έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και κόβει τον άξονα y'y στο σημείο (0,β)
Ευθεία	$y - y_o = \lambda\cdot(x - x_o)$	Έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και περνά από το σημείο (x_o, y_o)
Ευθεία	$x = x_0$	Κατακόρυφη ευθεία για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης
Κύκλος	$(x-x_o)^2 + (y - y_o)^2 = \rho^2$	Έχει κέντρο το σημείο $K(x_o,y_o)$ και ακτίνα ρ
Παραβολή	$y^2 = 2px$	Έχει εστία στο σημείο $E(\frac{p}{2},0)$ και διευθετούσα την ευθεία $x = \frac{-p}{2}$
Έλλειψη	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	Έχει εστίες τα σημεία Ε΄ (-γ, 0), Ε(γ, 0) με $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$
Υπερβολή	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	Έχει εστίες τα σημεία Ε΄ (-γ, 0), Ε(γ, 0)με $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$

- **Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας** $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ όπου $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι 2 σημεία της ευθείας. Ισχύει $\lambda = \varepsilon\varphi\theta$ όπου θ η γωνία που σχηματίζει ο θετικός άξονας x με την ευθεία.
- Αν δύο ευθείες $\varepsilon_1 : y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2 : y = \lambda_2 x + \beta_2$ είναι παράλληλες τότε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$
- Αν δύο ευθείες $\varepsilon_1 : y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2 : y = \lambda_2 x + \beta_2$ είναι κάθετες τότε το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσής τους είναι -1, δηλαδή $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

- Που χρησιμοποιούνται;
  Κυρίως στους μιγαδικούς (εύρεση γεωμετρικών τόπων) ενώ η ευθεία εμφανίζεται παντού! (γεωμετρικοί τόποι, εφαπτομένη καμπύλης κλπ)

  Παράδειγμα 1⁰: Σε πολλές περιπτώσεις μας ζητάνε να βρούμε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με γνωστά άκρα $A(x_A,y_A)$ και $B(x_B,y_B)$.



Η (ε) περνάει από το Μ (το μέσο του ΑΒ) το οποίο έχει συντεταγμένες $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{(\varepsilon)}$, για τον οποίο ισχύει

$\lambda_{(\varepsilon)} \cdot \lambda_{AB} = -1$ αφού η (ε) ⊥ ΑΒ. Άρα $\lambda_{(\varepsilon)} = \frac{-1}{\lambda_{AB}}$ και $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ $\Rightarrow \lambda_{(\varepsilon)} = -\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$.

Άρα η (ε) έχει εξίσωση: $y - \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-(x_B - x_A)}{y_B - y_A}\left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)$

(προσοχή! με συγκεκριμένα νούμερα τα πράγματα είναι πιο απλά!) Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι όλα τα σημεία της ευθείας (ε) ισαπέχουν από το Α και Β.
Άρα η ευθεία (ε) είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από 2 συγκεκριμένα γνωστά σημεία Α και Β, ή $d(M,A) = d(M,B)$ όπου $M(x,y) \in (\varepsilon)$.

Παράδειγμα 2⁰: Ο κύκλος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν από ένα συγκεκριμένο και γνωστό σημείο $K(x_o,y_o)$ συγκεκριμένη και γνωστή απόσταση ρ. Δηλαδή, η εξίσωση του κύκλου C, $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = \rho^2$ είναι ισοδύναμη με την πιο απλή $d(M,K) = \rho$, όπου $M(x,y) \in C$ ένα τυχαίο σημείο του κύκλου, Κ το κέντρο του και ρ (>0) η ακτίνα του κύκλου. Πρέπει δηλαδή να κατανοήσουμε την ευθεία και τις κωνικές τομές με τον ορισμό τους, δηλαδή την πραγματική τους υπόσταση ως γεωμετρικούς τόπους.

- Τριγωνομετρία (για όχι και τόσο γερές μνήμες)

- *Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών ορισμένων γωνιών.*

ω	ημω	συνω	εφω	σφω
0^o ή 0 rad	0	1	0	δεν ορίζεται
30^0 ή $\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^0 ή $\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0 ή $\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^0 ή $\frac{\pi}{2}$	1	0	δεν ορίζεται (γιατί ο παρονομαστής = 0)	0

Προσοχή! *$180^{\,0}$ μοίρες αντιστοιχούν σε π rad, άρα μ (μοίρες) = 180^0 ·α (rad) / π*

Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών:

α) Αντιθέτων τόξων
Τα αντίθετα τόξα **x, -x** έχουν το **ίδιο συνημίτονο** και αντίθετους όλους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς δηλαδή:
ημ(-x) = -ημx, συν(-x) = συνx, εφ(-x) = -εφx, σφ(-x) = - σφx

β) Παραπληρωματικών τόξων
Τα παραπληρωματικά τόξα **x, π-x** έχουν το **ίδιο ημίτονο** και αντίθετους όλους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς, δηλαδή:
ημ(π-x) = ημx, συν(π-x) = -συνx, εφ(π-x) = -εφx, σφ(π-x)= -σφx

γ) Συμπληρωματικών τόξων
Στα συμπληρωματικά τόξα **x,** $\frac{\pi}{2}$**-x** το ημίτονο του ενός τόξου είναι το συνημίτονο του άλλου και η εφαπτομένη του ενός είναι συνεφαπτομένη του άλλου δηλαδή:
ημ($\frac{\pi}{2}$-x) = συνx, συν($\frac{\pi}{2}$-x) = ημx, εφ($\frac{\pi}{2}$-x) =σφx, σφ($\frac{\pi}{2}$-x)=εφx

δ) Τόξων που διαφέρουν κατά π
Τα τόξα που διαφέρουν κατά π **x, π+x** έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο και ίση εφαπτόμενη και συνεφαπτόμενη, δηλαδή:
ημ(π+x) = -ημx, συν(π+x) = -συνx, εφ(π+x)=εφx, σφ(π+x) = σφx

- *Άλλοι χρήσιμοι τύποι*

ημ(α+β) = ημα · συνβ + ημβ · συνα	ημ(α-β) = ημα · συνβ - ημβ ·συνα
συν(α+β) = συνα · συνβ – ημα ·ημβ	συν(α-β) = συνα ·συνβ + ημα ·ημβ
εφ(α+β) = $\frac{\varepsilon\phi\alpha + \varepsilon\phi\beta}{1 - \varepsilon\phi\alpha \cdot \varepsilon\phi\beta}$	εφ(α-β) = $\frac{\varepsilon\phi\alpha - \varepsilon\phi\beta}{1 + \varepsilon\phi\alpha \cdot \varepsilon\phi\beta}$

ημ2α = 2ημα · συνα	συν2α = 2συν^{2}α - 1 ⇔ συν^{2}α = $\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$ (1)

$συν2α = συν^2α – ημ^2α$	$συν2α = 1-2ημ^2α \Leftrightarrow ημ^2α = \frac{1-συν2α}{2}$ (2)
$εφ2α = \frac{2εφα}{1-εφ^2α}$	Οι τύποι (1) και (2) λέγονται τύποι αποτετραγωνισμού γιατί «φεύγουν» τα τετράγωνα.

Προσοχή! Ο δεύτερος πίνακας βγαίνει από τον πρώτο με αντικατάσταση β=α. Γενικά η τριγωνομετρία θέλει περισσότερο κατανόηση του τριγωνομετρικού κύκλου και κάποιων βασικών σχέσεων παρά απομνημόνευση.

- ***Τριγωνομετρικές εξισώσεις***

Για να λύσουμε μία τριγωνομετρική εξίσωση προσπαθούμε μετά την εκτέλεση των πράξεων να φτάσουμε σε μία από τις παρακάτω μορφές.(Δίπλα σε καθεμιά δίνεται η λύση της)

α) $ημx = ημθ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2κπ + θ & ή \\ x = 2κπ + π - θ \end{cases}$, $κ \in Z$.

β) $συνx = συνθ \Leftrightarrow x = 2κπ \pm θ$, $κ \in Z$

γ) $εφx = εφθ \Leftrightarrow x = κπ + θ$, $κ \in Z$

δ) $σφx = σφθ \Leftrightarrow x = κπ + θ$, $κ \in Z$

Προσοχή! ‘Όταν μας ζητούν τις λύσεις μίας τριγωνομετρικής εξίσωσης σε συγκεκριμένο διάστημα, πχ στο [0,2π), τότε χρησιμοποιούμε τους παραπάνω γενικούς τύπους και αντικαθιστούμε το κ με 0, ±1, ±2 κλπ μέχρι να «βγούμε» έξω από το συγκεκριμένο διάστημα , πχ [0,2π).

- ***Πώς ορίζουμε το ημίτονο και το συνημίτονο μιας γωνίας στον τριγωνομετρικό κύκλο και ποιες είναι οι άμεσες συνέπειες του ορισμού;***

Αν η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Μ(x,y),τότε:

i) ημω = y (η τεταγμένη του Μ)

ii) συνω= x (η τετμημένη του Μ)

Άμεση συνέπεια των ορισμών αυτών είναι:

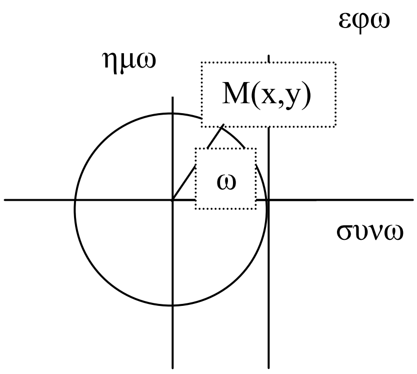
Οι τιμές των ημω και συνω δεν μπορούν να υπερβούν κατ’ απόλυτη τιμή την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή το 1.

Όποτε: $-1 \le ημω \le 1$ και $-1 \le συνω \le 1$

iii) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα $x^2+y^2=1^2$ έχουμε τη **βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ για κάθε γωνία ω.**

Τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα (για τους παπαγάλους, το ΟΗΕΣ).

	1^0	2^0	3^0	4^0
ημ	+	+	-	-
συν	+	-	-	+
εφ	+	-	+	-
σφ	+	-	+	-
θετικοί	Όλοι	Ημιτ	Εφ	Συν



Ο τριγωνομετρικός κύκλος: Ο άξονας x'x αντιστοιχεί στο συνω και ο y'y στο ημω. Η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με 1.

Συναρτήσεις (η πεμπτουσία των μαθηματικών! ή όλα είναι συναρτήσεις)

- ***Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;***
  Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του R. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (function) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της συνάρτησης f στο x και συμβολίζεται με f(x). Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή γράφουμε: $f: A \to R$ έτσι ώστε κάθε $x \in A \to f(x) = y \in R$.
  Το x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του Α λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το γράμμα y που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή (γιατί εξαρτάται από το x). Το πεδίο ορισμού Α της f το παριστάνουμε και με D_f.

- ***Τι ονομάζουμε μαθηματικό τύπο μιας συνάρτησης;***
  Η εξίσωση που δίνει την τιμή μιας συνάρτησης στο x λέγεται μαθηματικός τύπος της συνάρτησης. π.χ για τη συνάρτηση f για την οποία έχουμε:
  $x \to \dfrac{x^2+3}{x-1}$ ο μαθηματικός τύπος της είναι $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$

- ***Τι ονομάζουμε σύνολο (ή πεδίο) τιμών της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το Α;***
  Είναι το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, συμβολίζεται με f(A). Είναι $f(A) = \{y \in R$ έτσι ώστε υπάρχει $x \in A$ με $y = f(x)\}$

- ***Ποια στοιχεία πρέπει να δοθούν για να οριστεί μια συνάρτηση;***
  Πρέπει να δοθούν α) Το πεδίο ορισμού της Α και
  β) Η τιμή της συνάρτησης f(x) σε κάθε $x \in A$, δηλαδή ο μαθηματικός τύπος της συνάρτησης.

Προσοχή! Γενικά στην ανάλυση αν μας δώσουν μόνο τον μαθηματικό τύπο της συνάρτησης θα πρέπει να βρούμε εμείς το πεδίο ορισμού της!

- ***Όταν για μια συνάρτηση δίνεται μόνο ο τύπος της, τότε ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;***
  Είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x, για τους οποίους το f(x) έχει νόημα, δηλαδή $f(x) \in R$. Διακρίνουμε τις εξής βασικές περιπτώσεις:

- Αν η συνάρτηση είναι κλασματική τότε βρίσκουμε τις ρίζες του παρανομαστή και τις εξαιρούμε από το R.

  πχ όταν δοθεί ο τύπος f(x) = $\frac{x+2}{x^2-1}$ της συνάρτησης f, βρίσκουμε τις ρίζες του παρονομαστή x^2 -1 λύνοντας την εξίσωση $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$ (x = 1 ή x = -1)

  Οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι A = R – {-1,1}.

- Αν η συνάρτηση είναι άρρητη, τότε εξαιρούμε από το R τις τιμές του x που κάνουν το υπόρριζο αρνητικό, δηλαδή το υπόρριζο να είναι μη αρνητικό.

  πχ Αν f(x) = $\sqrt{x^2-4}$, τότε πρέπει:

  $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 2$ (το τριώνυμο πρέπει να είναι θετικό ή μηδέν, δηλαδή ομόσημο του 1). Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι A = $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

- Η συνάρτηση f(x) = α^x, $\alpha \neq 1$, $\alpha > 0$ έχει πεδίο ορισμού το R.

- Η συνάρτηση f(x) = $\log_\alpha x$, $\alpha \neq 1$, $\alpha > 0$ έχει πεδίο ορισμού το A = $(0, +\infty)$

- Αν η συνάρτηση περιέχει $\log_\alpha$, ή ln τότε η ποσότητα που λογαριθμίζεται πρέπει να είναι θετική (αυστηρά, δηλαδή >0).

  πχ f(x) = $\ln(x^2 - 5x + 4)$

  Πρέπει $x^2 - 5x + 4 > 0$ (τι σας έλεγα για το τριώνυμο;)

  Είναι $\Delta = 25 - 16 = 9$ και $x_1 = \frac{5-3}{2} = 1$, $x_2 = \frac{5+3}{2} = 4$.

  Κάνουμε πίνακα προσήμων του $x^2 - 5x + 4$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x^2 -5x +4$		+	0	-	0	+	

  Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι: $D_f = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$

- Συνδυασμός των παραπάνω, για παράδειγμα f(x) = $1/\sqrt{(x^2 - 5x + 4)}$,όπου θα πρέπει ο παρονομαστής να είναι διαφορετικός από μηδέν και η υπόριζη ποσότητα (το τριώνυμο) να είναι θετική, άρα $x^2-5x+4>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)>0 \Leftrightarrow x<1$ ή $x>4$, δηλαδή $A=(-\infty,1) \cup (4, +\infty)$.

- ***Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού A;***

  Είναι το σύνολο των σημείων M(x,y) για τα οποία ισχύει y = f(x), δηλαδή το σύνολο των σημείων M(x,f(x)), $x \in A$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f συμβολίζεται με C_f. Προσοχή! όλα τα σημεία που ανήκουν στη C_f ικανοποιούν την σχέση y = f(x) και αντιστρόφως, όλα τα ζεύγη αριθμών (x,y) που ικανοποιούν τη σχέση y = f(x) είναι σημεία της C_f.

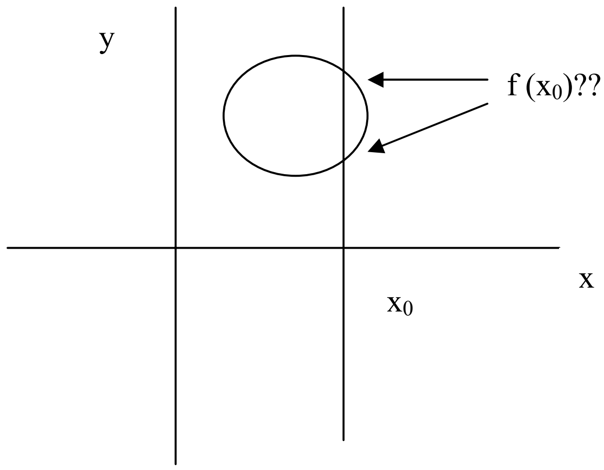
- ***Τι ονομάζουμε εξίσωση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f;***

  Ονομάζουμε την εξίσωση: y = f(x)

  πχ για τη συνάρτηση f(x) = 3x + 5 η εξίσωση της γραφικής παράστασης είναι η ευθεία με εξίσωση y = 3x + 5

- ***Πώς μπορούμε να καταλάβουμε ότι μια γραμμή είναι γραφική παράσταση συνάρτησης;***

  Όταν οποιαδήποτε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραμμή το πολύ ένα κοινό σημείο.

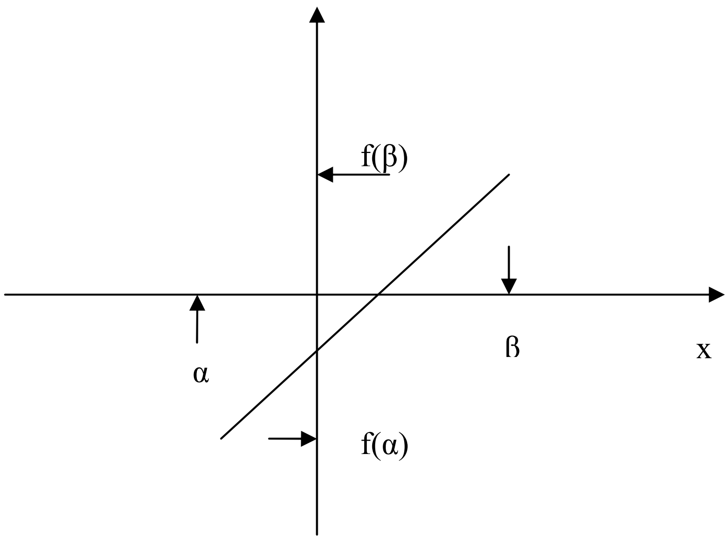


Ο κύκλος δεν είναι συνάρτηση! Η γραφική του παράσταση και η ευθεία $x=x_0$ τέμνονται σε 2 σημεία.

- ***Πώς μπορούμε να βρούμε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης αν γνωρίζουμε τη γραφική της παράσταση;***

I) Το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο όλων των τετμημένων των σημείων της C_f
Για το παρακάτω σχήμα είναι $D_f = [α, β]$

II) Το σύνολο τιμών της f, είναι το σύνολο f(A) των τεταγμένων των σημείων της C_f
Για το παρακάτω σχήμα είναι: $f(A) = [f(α), f(β)]$



- ***Πώς βρίσκουμε την τιμή της συνάρτησης f στο $x_o \in A$ από τη γραφική της παράσταση;***

Βρίσκουμε την τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ με την γραφική παράσταση. Δηλαδή, φέρνουμε κάθετη προς τον άξονα x'x στο σημείο του με τετμημένη x_o, η οποία τέμνει τη γραφική παράσταση στο σημείο Α και από το Α φέρνουμε κάθετη προς τον άξονα y'y που τον τέμνει στο σημείο με τεταγμένη $f(x_o)$
Άρα η τιμή της f στο x_o είναι το $f(x_o)$.

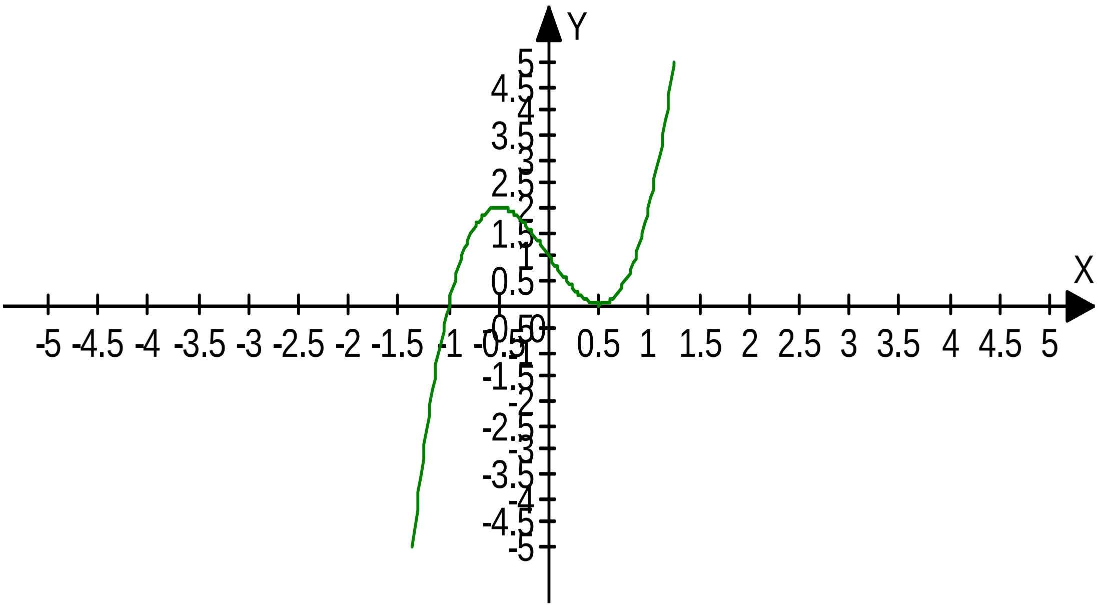
-Πως κάνουμε την γραφική παράσταση μίας συνάρτησης;

1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού

2. Βρίσκουμε τα τοπικά ελάχιστα και τοπικά μέγιστα (ακρότατα)
3. Βρίσκουμε την μονοτονία (γν. αύξουσα, γν. φθίνουσα)
4. Φτιάχνουμε έναν πίνακα τιμών ((x, f(x)) και βρίσκουμε τα σημεία τομής με τους άξονες x’x (οι λύσεις της εξίσωσης f(x)=y=0), y’y (τα σημεία (0,f(0)) εφόσον υπάρχουν.

Στα 2 και 3 θα μας βοηθήσουν πολύ οι γνώσεις που θα μάθουμε φέτος για την παράγωγο της συνάρτησης.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=(2x-1)^2(x+1)$



Τι συμπεράσματα βγάζετε από το παραπάνω σχήμα για:

1. Το πεδίο ορισμού της f
2. Τα ακρότατα της f
3. Την μονοτονία της f

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε την εξίσωση: $2^{2x+1} - 4 \cdot 2^{x} = 0$

2. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $5^{x^2-5x+6} \langle\ 1$ ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \langle \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4}$ iii) $\log(x+1) + 2\log\sqrt{5x} < 2$

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 3^x + 2^y = 11 \\ 3^x - 2^y = 7 \end{cases}$$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\log(x+1) + \log(x-1) = \log 2$ ii) $\log(x^2+1) - \log x = \log 2$

iii) $5^x = 2^{1-x}$ iv) $3^{x-1} = 2^{x+1}$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $|2x-3| = 8$ ii) $|x+3| = |2x-5|$

6. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $|2x+1| \langle\ 3$ ii) $|2x-3| \geq 5$

7. Να λυθεί η εξίσωση: $2|x-2| - |x+1| = 12$

8. Αν $3 \langle\ x \langle\ 7$, να δείξετε ότι η παράσταση $A = \sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{x^2-14x+49}$ είναι ανεξάρτητη του x.

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) ημx = 1 ii) ημx = -1 iii) ημx = 0

iv) συνx = 1 v) συνx = -1 vi) συνx = 0

10. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) εφx = 1 ii) σφx = -1 iii) $εφ^2x = 3$

iv) $ημ^2x = 3$ v) $ημ^2x - 3\,ημx + 2 = 0$

11. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

i) y = ημx ii) y = συνx iii) y = 1/x iv) $y=x^2 -3x +2$

v) $y= 2x^2 +3x +2$ vi) $y=e^x$ vii) y = lnx viii) y = 2x+1

ix) y = 2 |x| +1 x) $y=e^{-2x}$ xi) y=ln(x-2)

12. Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο P(x) και στη συνέχεια να λύσετε την ανισότητα P(x)>0, όπου $P(x) = x^3+2x^2+3x+6$.