

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Νώντας Κεχαγιάς
Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Ιωάννινα, 2008

Περιεχόμενα

1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	vii
1.1	ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ	vii
1.2	ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΠΡΩΤΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ	vii
2	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ	1
3	ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΘΕΣΗΣ	7
3.1	Η μέθοδος της Ουγγαρίας	8
3.2	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	13
4	ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΩΝ	15
4.1	Κλίκες	19
4.2	Κατευθυνόμενοι γράφοι κυριαρχίας	21
4.3	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	22
5	ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ	25
5.1	Μέθοδος Jacobi	27
5.2	Μέθοδος Gauss-Seidel	27
5.3	Διαγωνοποίηση Συμμετρικών Πινάκων	29
5.4	Υπολογισμός ιδιοτιμών με επανάληψη	31
5.5	ΝΟΡΜΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ	34
5.6	Ιδιοτιμές σε δίκτυα	38
5.7	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	40
6	ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΑΡΚΟΒ	43
6.1	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	50
7	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΑΙΧΝΙΩΝ	53
7.1	Παίγνιο δύο ατόμων με μηδενικό άθροισμα κέρδους- ζημιάς	54
7.2	Παίγνια με επιλογή στρατηγικής	56
7.3	Πίνακας παιγνίων 2×2	58
7.4	Παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος και το δίλημμα του φυλακισμένου	60
7.5	Βέλτιστη στρατηγική για παίγνια με δύο παίκτες	61
7.6	Μέθοδος εύρεσης βέλτιστης στρατηγικής	63
7.7	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	63

8	ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ	65
8.1	Μοντέλο Εσόδων - Εξόδων (Κλειστό)	65
8.2	Μοντέλο Παραγωγής (Ανοικτό)	68
8.3	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	72
9	ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ	75
9.1	ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ	75
9.2	Εξέλιξη Πληθυσμού	77
9.3	Το μοντέλο συγκομιδής	82
9.4	Ομοιόμορφη Συγκομιδή	83
9.5	Συγκέντρωση των πιο νέων μελών ενός πληθυσμού	84
9.6	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	85
10	ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΓΕΝΕΤΙΚΗ	87
10.1	Αυτοσωματική κληρονομικότητα	88
10.2	Αυτοσωματικές λανθάνουσες ασθένειες	90
10.3	X-Κληρονομικότητα	91
10.4	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	94
11	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΕΘΟΔΟΥ SIMPLEX	95
11.1	ΓΕΝΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ- ΤΙΣΜΟΥ (Π.Γ.Π.)	98
11.2	ΠΡΟΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ SIMPLEX	100
11.3	ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX	101
11.4	ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ SIMPLEX	105
11.5	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	107
12	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΕΙΡΩΝ FOURIER	111
12.1	ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ	111
12.2	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΕΙΡΩΝ FOURIER	115
12.3	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	120
13	ΧΑΟΣ	123
13.1	Η ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΓΑΤΩΝ ΤΟΥ ARNOLD	124
13.2	ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ	127
13.3	ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ	129
13.4	ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΚΑΙ ΠΛΑΤΟΣ ΤΩΝ PIXELS	133
13.5	ΤΟ ΠΛΑΚΟΣΤΡΩΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ	136
13.6	ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ ΤΗΣ ΓΑΤΑΣ ΤΟΥ ARNOLD	136
13.7	ΜΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ	139
13.8	ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΧΑΟΥΣ	140
13.9	ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ	142
13.10	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	144
14	FRACTALS	147

14.1	Σύνολα όμοια με τον εαυτό τους 'Αυτοόμοια'	148
14.2	Τοπολογική διάσταση ενός υποσυνόλου του επιπέδου	153
14.3	Διάσταση Hausdorff ενός αυτοόμοιου συνόλου	153
14.4	Fractals	155
14.5	Ομοιότητες	156
14.6	Αλγόριθμοι για παραγωγή fractals	161
14.7	Μια MONTE CARLO προσέγγιση	165
14.8	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	167
15	ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ	
	ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ	175
15.1	Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ Η ΕΙΣΩΣΗ FOURIER	175
15.2	Κατανομή θερμότητας ανεξαρτήτως του χρόνου	180
15.3	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	187

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Η πρώτη έκδοση αυτού του βιβλίου φαίνεται ότι πέτυχε το στόχο της. Ευχαριστώ αναγνώστες και συναδέλφους για την ενθάρρυνσή τους.

Κινούμενος στο ίδιο πλαίσιο, πρόσθεσα τέσσερα νέα κεφάλαια, τα οποία πιστεύω ότι είναι ενδιαφέροντα, επίκαιρα και συμπληρώνουν την ύλη της πρώτης έκδοσης.

Ιωάννινα 2008

1.2 ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΠΡΩΤΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Οι σημειώσεις αυτές σκοπό έχουν να παρουσιάσουν μερικές εφαρμογές της γραμμικής άλγεβρας κυρίως σε άλλες επιστήμες. Το αντικείμενο είναι η μελέτη μοντέλων και προβλημάτων από επιστήμες όπως Οικονομία, Κοινωνιολογία, Γενετική, Οικολογία, Θεωρία παιχνίων, Φυσική κ.α..

Σε ένα τυπικό μάθημα γραμμικής άλγεβρας όπου το βάρος δίνεται στην προετοιμασία των διδασκομένων για εφαρμογές του μαθήματος σε άλλους κλάδους των Μαθηματικών, δεν απομένει αρκετός χρόνος για εφαρμογές πέραν των απαραίτητων. Κυρίως για αυτόν το λόγο το αντικείμενο φαίνεται ξεκομμένο από την πραγματικότητα και δρα ανασταλτικά για τους μη άμεσα ενδιαφερομένους. Κάτι ανάλογο αντιμετωπίζεται και στον Απειροστικό λογισμό όταν τον μελετάμε μακριά από τις φυσικές επιστήμες που οδήγησαν στην εξέλιξη του.

Με αυτές τις σημειώσεις προσπαθούμε να γεφυρώσουμε αυτό το χάσμα. Οι σύγχρονες τάσεις αλλά και οι απαιτήσεις της τεχνολογίας εντείνουν αυτήν την ανάγκη προσέγγισης των θεωρητικών μαθημάτων.

Η τακτική που θα ακολουθήσουμε είναι η εξής: Θεωρούμε ότι έχουμε μία καλή γνώση της γραμμικής άλγεβρας και βασικές γνώσεις από τη θεωρία πιθανοτήτων. Ξεκινώντας από κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα από την πραγματικότητα, δημιουργούμε ένα μαθηματικό μοντέλο το οποίο περιγράφει μία ολόκληρη οικογένεια σχετικών προβλημάτων και το μελετούμε. Βάζοντας κάποιους περιορισμούς στο αρχικό πρόβλημα μπορούμε να απαντήσουμε για τη μελλοντική εξέλιξη του.

Τα περισσότερα μοντέλα που μελετάμε τα έχουμε δανειστεί από το κλασικό βιβλίο για αυτά τα θέματα των Chris Rorres and Howard Anton "Applications of Linear Algebra".

Η μέθοδος μας επικεντρώνεται στη δημιουργία ενός πίνακα ο οποίος περιέχει τις πληροφορίες του μοντέλου σε μαθηματική γλώσσα και τη μελέτη του. Είναι γνωστό ότι η μελέτη ενός πίνακα απλουστεύεται αν διαγωνοποιηθεί. Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά του είναι απαραίτητα και στα περισσότερα προβλήματα μια συγκεκριμένη ιδιοτιμή απαντά σε σημαντικό μέρος του προβλήματος.

Θα ξεκινήσουμε λοιπόν από δύο απλά μοντέλα (Ανάθεση και Εφαρμογών της Θεωρίας Γράφων) με ποικίλες εφαρμογές για να πάρουμε μια γεύση του τρόπου που θα εργαστούμε. Ακολούθως θα προχωρήσουμε σε μια γρήγορη επανάληψη μερικών επαναληπτικών μεθόδων εύρεσης ιδιοτιμών (οι πίνακες που εμφανίζονται στην πράξη είναι μεγάλης διάστασης και η εύρεση των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου αρκετά επίπονη) και των πραγματικών συμμετρικών πινάκων οι οποίοι αντιμετωπίζονται σε αρκετές εφαρμογές. Στο κύριο μέρος θα ασχοληθούμε με διάφορα σημαντικά μοντέλα από τη Θεωρία Παιχνίων, Οικονομικών, Κοινωνιολογίας, και Γενετικής.

Οι σημειώσεις αυτές δεν είναι σε τελική μορφή και διορθώσεις όπως επίσης και συμπληρώσεις θα πρέπει να γίνουν ώστε να δώσουν μια σαφή εικόνα του αντικειμένου. Ευχαριστούμε ιδιαίτερος τους συναδέλφους Απόστολο Γέγιο, Κώστα Καρακώστα και Χρήστο Λάγκαρη για τις χρήσιμες παρατηρήσεις και υποδείξεις τους. Οποσδήποτε ο συγγραφέας θεωρεί τον εαυτό του υπεύθυνο για όλα τα λάθη, μαθηματικά και μη.

Κεφάλαιο 2

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Ένα μαθηματικό μοντέλο είναι μια μαθηματική έκφραση κάποιας κατηγορίας προβλημάτων από την πραγματικότητα. Η θεωρία σχετικότητας του Αϊνστάιν είναι ένα απτό παράδειγμα. Το ζητούμενο είναι να αναλυθούν και να οργανωθούν με μαθηματικό τρόπο πολύπλοκα συστήματα. Όπως για παράδειγμα:

Η οικονομία μιας χώρας στην οποία υπεισέρχονται η προσφορά και η ζήτηση διαφόρων προϊόντων.

Η εξυπηρέτηση τηλεφωνημάτων μεταξύ διαφόρων χωρών.

Οι παράγοντες που επηρεάζουν κάποια ασθένεια και η εξέλιξη της στον χρόνο, κ.λ.π..

Δυστυχώς τα περισσότερα μοντέλα απαιτούν μεγάλες ποσότητες πληροφοριών οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύπλοκους και τις περισσότερες φορές άγνωστους τρόπους. Φυσικά όσο περισσότερες πληροφορίες χρησιμοποιούμε για το μοντέλο μας τόσο πιο ακριβή στοιχεία θα μας δώσει. Οι μηχανισμοί με τους οποίους οι ανεξάρτητες μεταβλητές επηρεάζουν το συγκεκριμένο μοντέλο δεν είναι συνήθως γνωστοί. Σ' αυτές τις περιπτώσεις το μοντέλο μας θα πρέπει να είναι απλό και παρόλα αυτά θα πρέπει να δίνει πληροφορίες τις οποίες δεν μπορούμε να αποκομίσουμε διαφορετικά.

Τα περισσότερα μοντέλα δεν είναι γραμμικά. Τα γραμμικά τα οποία θα μελετήσουμε εμείς είναι απλούστερα και οι απαντήσεις τους δίνουν μια καλή προσέγγιση της πραγματικότητας. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι τόσο καλά όσο η προσέγγιση μιας συνάρτησης από την πρώτη παράγωγο σε σχέση με ένα πολυώνυμο Taylor ανωτέρου βαθμού.

Ας μελετήσουμε μερικά απλά και ταυτόχρονα χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1 *Έστω ότι η οικονομία μιας πόλης στηρίζεται σε τρεις βιομηχανίες: Ένα ορυχείο άνθρακος, Ένα σταθμό παραγωγής ηλεκτρικής*

ενέργειας, και Μια εταιρεία μεταφορών. (Η μονάδα χρημάτων που θα χρησιμοποιήσουμε αντιστοιχεί σε 10000 ευρώ.) Για την εξόρυξη 1μ άνθρακα, η εταιρεία αγοράζει 0.25μ ενέργεια και 0.25μ υπηρεσίες μεταφοράς. Για την παραγωγή 1μ ηλεκτρισμού, η εταιρεία αγοράζει 0.65μ άνθρακα, χρησιμοποιεί 0.05μ ηλεκτρική ενέργεια, και 0.05μ υπηρεσίες μεταφοράς. Για την παροχή 1μ υπηρεσιών μεταφοράς, η εταιρεία χρειάζεται 0.55μ άνθρακα και 0.1μ ηλεκτρική ενέργεια. Κάποια εβδομάδα, η εταιρεία άνθρακος είχε παραγγελία 50000μ από μια εταιρεία εκτός της πόλης και η εταιρεία ηλεκτρικής ενέργειας 25000μ για ρεύμα εκτός πόλης. Πόση πρέπει να είναι η παραγωγή ώστε να ικανοποιηθεί η εντός και εκτός πόλης ζήτηση;

Έστω

x_1 =άνθρακας σε μ που εξορυγνούνται σε μία βδομάδα.

x_2 =ηλεκτρική ενέργεια σε μ που παράγονται σε μία βδομάδα.

x_3 =υπηρεσίες σε μ που προσφέρονται σε μία βδομάδα.

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του προβλήματος καταστρώνουμε τις επόμενες εξισώσεις:

(2.1)

Προσφορά/Ζήτηση	Ανθρακας	Ρεύμα	Μεταφορά	Εξαγωγή	
Ανθρακας	$x_1 =$		$0.65x_2 +$	$0.55x_3 +$	50000
Ρεύμα	$x_2 =$	$0.25x_1 +$	$0.05x_2 +$	$0.1x_3 +$	25000
Μεταφορά	$x_3 =$	$0.25x_1 +$	$0.05x_2 +$		

Έχουμε λοιπόν το επόμενο σύστημα:

$$x_1 - 0.65x_2 - 0.55x_3 = 50000$$

$$-0.25x_1 + 0.95x_2 - 0.1x_3 = 25000$$

$$-0.25x_1 - 0.05x_2 + x_3 = 0$$

Προφανώς, οι άγνωστοι είναι μη-αρνητικοί.

Ο πίνακας των συντελεστών από τις εξισώσεις (2.1) καλείται *πίνακας κατανάλωσης* M γιατί ουσιαστικά αυτοί οι συντελεστές καθορίζουν την κατανάλωση.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0.65 & 0.55 \\ 0.25 & 0.05 & 0.1 \\ 0.25 & 0.05 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Έχουμε λοιπόν } (I - M) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50000 \\ 25000 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Η λύση του προηγούμενου γραμμικού συστήματος αποτελεί και λύση του προβλήματος. Θα μελετήσουμε τη λύση του στα Οικονομικά μοντέλα.

Φανταστείτε το προηγούμενο πρόβλημα πόσο πολύπλοκο θα ήταν, αν περιέγραφε την οικονομία μιάς χώρας όπως οι Ηνωμένες Πολιτείες ή ολόκληρου του πλανήτη.

Το προηγούμενο μοντέλο είναι στατικό (δεν εξαρτάται από τον χρόνο). Ας δούμε και ένα παράδειγμα δυναμικού μοντέλου.

Παράδειγμα 2 Το μοντέλο του βατράχου (αυτό έχει πολλές εφαρμογές στα ηλεκτρονικά παιχνίδια). Έστω ότι ένας βάτραχος πηδά μεταξύ έξι λωρίδων. Από αριστερά, θέση 1, προς τα δεξιά, θέση 6. Προφανώς η θέση του εξαρτάται από το που βρίσκεται (ουσιαστικά από την πιθανότητα να βρίσκεται σε κάποια θέση) και η πιθανότητες έχει να κινηθεί σε νέα θέση. Έστω ότι ο επόμενος πίνακας $M = (p_{ij})$ δίνει την πιθανότητα μετάβασης από τη θέση j στην i .

	1	2	3	4	5	6
1	1/2	1/4	0	0	0	0
2	1/2	1/2	1/4	0	0	0
Επόμενη θέση 3	0	1/4	1/2	1/4	0	0
4	0	0	1/4	1/2	1/4	0
5	0	0	0	1/4	1/2	1/2
6	0	0	0	0	1/4	1/2

Έστω $p_i^{(n)}$ η πιθανότητα να βρίσκεται ο βάτραχος στην i θέση στο n -οστό πήδημα. Τότε η νέα πιθανότητα είναι:

$$p_i^{(n)} = p_{i1}p_1^{(n-1)} + p_{i2}p_2^{(n-1)} + \dots + p_{i6}p_6^{(n-1)}.$$

Ας υποθέσουμε ότι στο παράδειγμά μας οι αρχικές πιθανότητες είναι για $n = 0$:

$$p_1 = p_2 = 0.5, \quad p_i = 0, \quad i > 2.$$

Οι νέες πιθανότητες για $n = 1$ γίνονται:

$$p_1^{(1)} = 0.5p_1 + 0.25p_2 = 0.375$$

$$p_2^{(1)} = 0.5$$

$$p_3^{(1)} = 0.125$$

$$p_4^{(1)} = p_5^{(1)} = p_6^{(1)} = 0$$

Τα εύλογα ερωτήματα που πρέπει να απαντήσουμε είναι τα εξής:

- 1) Ποιά είναι η συμπεριφορά των πιθανοτήτων στο χρόνο;
- 2) Μπορούμε να προβλέψουμε την πιθανότητα να βρίσκεται ο βάτραχος σε διάφορες θέσεις μετά από παρέλευση αρκετού χρόνου;

Αυτό το μοντέλο θα το μελετήσουμε στις αλυσίδες Markov.

Προχωρούμε τώρα σε ένα σημαντικό πρόβλημα στη γενετική, το οποίο θα το μελετήσουμε στο μοντέλο της κληρονομικότητας.

Παράδειγμα 3 Κάθε οργανισμός κληρονομεί από ένα γονίδιο από το ζεύγος των γονιδίων κάθε ενός από τους γονείς του και δημιουργεί το δικό του ζεύγος. Απ' ότι ξέρουμε είναι τυχαίο ποιο γονίδιο θα μεταβιβάσει ο γονέας στο παιδί του. Δηλαδή αν ο γονέας είναι AB το παιδί θα πάρει το A ή το B με την ίδια πιθανότητα. Αν ο ένας γονέας είναι BB και ο άλλος AB το παιδί σίγουρα θα πάρει το B από τον πρώτο και το A ή το B από τον δεύτερο. Άρα το παιδί έχει την ίδια πιθανότητα να είναι BA ή BB . Ο επόμενος πίνακας δίνει όλες τις πιθανές επιλογές και τις αντίστοιχες πιθανότητες.

	(AA, AA)	(AA, AB)	(AA, BB)	(AB, AB)	(AB, BB)	(BB, BB)
AA	1	$1/2$	0	$1/4$	0	0
AB	0	$1/2$	1	$1/2$	$1/2$	0
BB	0	0	0	$1/4$	$1/2$	1

Αυτό το είδος κληρονομικότητας έχει να κάνει με το χρώμα των ματιών (ανθών), φαλακρότητα (τρίχωμα) κ.α..

ΕΦΑΡΜΟΓΗ Ένας γεωπόνος έχει ένα μεγάλο αριθμό φυτών τα οποία αποτελούνται από όλους τους τύπους γονιδίων AA , AB , BB . Θέλει να γονιμοποιεί κάθε υπάρχον φυτό με τον τύπο AA και να βρει την κατανομή των τύπων των γονιδίων του πληθυσμού μετά από πολλές γενιές. (Αυτό γίνεται γιατί ο τύπος AA έχει κάποιο χαρακτηριστικό που θέλουμε να επικρατήσει.)

Θα κλείσουμε την εισαγωγή αυτή με ένα χαρακτηριστικό πρόβλημα από τη θεωρία παιχνίων:

Παράδειγμα 4 Δύο ύποπτοι (A και B) συλλημβάνονται έξω από ένα κατάστημα, το οποίο είχε ληστευθεί. Οι ύποπτοι ανακρίνονται χωριστά και πιέζονται να ομολογήσουν. Η κατάσταση εκτιμάται ως εξής :

(1) Αν ομολογήσουν και οι δύο η ποινή που θα τους επιβληθεί θα είναι κανονική (θεωρούμε ότι χάνουν 4 μονάδες ο καθένας).

(2) Αν δεν ομολογήσουν θα καταδικαστούν μόνο για διαρρηκτικά εργαλεία (κερδίζουν 1 μονάδα).

(3) Αν ο ένας ομολογήσει και ο άλλος όχι, ο πρώτος θα αθωωθεί και ο δεύτερος θα καταδικαστεί βαριά (10 και -6 αντίστοιχα).

Θα θεωρήσουμε το πρόβλημα σαν παιχνίδι με δυο παίχτες. Δυο στρατηγικές υπάρχουν σ' αυτό το παιχνίδι: 1 ομολογία και 2 άρνηση. Ο σκοπός του μοντέλου αυτού είναι να βρεθεί η βέλτιστη στρατηγική για κάθε παίχτη.

Το ίδιο μοντέλο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τους εξοπλισμούς μεταξύ Αμερικής και Ρωσίας (και γιατί όχι μεταξύ Ελλάδος και Τουρκίας). Κάθε υποψήφιος πρέπει να αποφασίσει για μείωση ή αύξηση των εξοπλισμών. Αν αυξήσουν και οι δύο θα κερδίσουν περισσότερα όπλα αλλά θα είναι πιο

αδύνατοι σε κοινωνικές παροχές. Αν μειώσουν και οι δύο θα διατηρήσουν τη στρατιωτική θέση τους αλλά θα αυξήσουν τα οικονομικά για άλλες χρήσιμες κοινωνικές παροχές. Αν η μια αυξήσει τότε θα έχει υπεροχή όπλων και θα μπορεί να επιβληθεί, λόγω γοήτρου ή και στρατιωτικά, και σε άλλους τομείς.

Κεφάλαιο 3

ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΘΕΣΗΣ

Ένα πρόβλημα το οποίο είναι πολύ συνηθισμένο σε διάφορους χώρους εργασίας είναι η ανάθεση υποχρεώσεων σε πιθανές εταιρίες ή ομάδες εργασίας. Παραδείγματος χάριν:

- α) Υπευθυνότητες σε εργάτες.
- β) Εργαλεία σε θέσεις εργασίας.
- γ) Παίχτες σε θέσεις παιχνιδιού.

Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι ας δούμε το επόμενο πρόβλημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θέλουμε να τοποθετήσουμε θέρμανση σε τρία κτήρια σε σύντομο χρονικό διάστημα. Τρεις προσφορές δίνονται ως ακολούθως :

Προσφορές σε χιλιάδες ευρώ.

	κτήριο1	2	3
Εταιρεία1	53	96	37
2	47	87	41
3	60	92	36

Κάθε εταιρεία μπορεί να τοποθετήσει μόνο σε ένα κτήριο στη συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Άρα πρέπει να ανατεθεί η εργασία και στις τρεις εταιρείες. Ποία είναι η οικονομικότερη ανάθεση; Δηλαδή ποιο κτήριο θα πρέπει να αναλάβει κάθε εταιρεία ώστε να έχουμε τη μικρότερη δαπάνη;

Εδώ έχουμε $3! = 6$ διαφορετικούς τρόπους να εξετάσουμε. Αν ο πίνακας ήταν 10×10 τότε θα είχαμε 3.628.800 (τεράστιο νούμερο). Είναι απαραίτητο λοιπόν να βρούμε μαθηματική λύση του προβλήματος, χωρίς να είμαστε αναγκασμένοι να εξετάσουμε κάθε πιθανή δοκιμή.

Έστω ότι έχουμε n αναθέσεις να τακτοποιήσουμε σε n ομάδες. Υπάρχουν $n!$ διάφοροι τρόποι για την ανάθεση. Προφανώς θέλουμε να βρούμε την πιο **αποτελεσματική**. Φυσικά το 'αποτελεσματική' εξαρτάται από κάποιους παράγοντες οι οποίοι εξαρτώνται από το πρόβλημα.

Καλούμε c_{ij} το κόστος της ανάθεσης της i υποχρέωσης στην j ομάδα. Επίσης καλούμε **πίνακα κόστους** τον ακόλουθο πίνακα :

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ & \vdots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, c_{ij} \geq 0.$$

Από το προηγούμενο παράδειγμα φαίνεται ότι οι τιμές του C δεν είναι ανάγκη να είναι χρήματα. Θα το υποθέσουμε όμως αυτό χωρίς βλάβη της γενικότητας.

Θα εκφράσουμε τώρα ένα μαθηματικό μοντέλο το οποίο θα περιγράφει το προηγούμενο πρόβλημα.

$$\text{Έστω } a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{αν η } i\text{-εργασία δεν ανατίθεται στη } j\text{-ομάδα} \\ 1, & \text{αν η } i\text{-εργασία ανατίθεται στη } j\text{-ομάδα} \end{cases}$$

Δηλαδή ο $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ περιγράφει τα ζεύγη μίας ανάθεσης. Ουσιαστικά θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την ακόλουθη ποσότητα

$$z = \sum_i \sum_j c_{ij} a_{ij}.$$

$$\text{Όπου } \sum_j a_{ij} = 1 \text{ και } \sum_i a_{ij} = 1.$$

Ορισμός 5 Μια *ανάθεση* θα είναι ένα διάνυσμα με συντεταγμένες από τον C ώστε κάθε συντεταγμένη να εμφανίζεται από διαφορετική γραμμή και στήλη.

Αν $x = (c_{1j_1}, \dots, c_{nj_n})$ είναι μια ανάθεση θα έχουμε ότι οι δείκτες j_1, \dots, j_n είναι όλοι διάφοροι μεταξύ τους.

Ορισμός 6 Ονομάζουμε **κόστος** το άθροισμα των συντεταγμένων μιας ανάθεσης. Μια ανάθεση με το μικρότερο κόστος ονομάζεται (optimal) αποτελεσματική.

3.1 Η μέθοδος της Συγγαρίας

Έστω ότι κάποιο πρόβλημα έχει τον ακόλουθο πίνακα κόστους :

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & 7 & 7 \\ 7 & 9 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Μετασχηματίζουμε το προηγούμενο πρόβλημα ανάθεσης σε ένα με απλούστερο πίνακα. Η ιδέα είναι να εισάγουμε όσο το δυνατόν περισσότερα

μηδενικά χωρίς να αλλάξουμε το πρόβλημα. Παραδείγματος χάριν στο προηγούμενο πρόβλημα υπάρχει μηδενική ανάθεση: $a_{11} = 0, a_{23} = 0, a_{32} = 0, a_{45} = 0, a_{54} = 0$.

Θεώρημα 7 Αν προσθέσουμε έναν αριθμό σε όλα τα στοιχεία μιας στήλης ή γραμμής ενός πίνακα κόστους C τότε η οικονομικότερη ανάθεση για τον νέο πίνακα C' θα είναι ίδια με τον αρχικό. (Αυτό δεν σημαίνει ότι θα έχουν το ίδιο κόστος).

Απόδειξη. Έστω ότι έχουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό :

$$(c_{i1}, \dots, c_{in}) \rightarrow (c_{i1}+a, c_{i2}+a, \dots, c_{in}+a) \text{ και } (c_{1j}, \dots, c_{nj})^t \rightarrow (c_{1j}+b, \dots, c_{nj}+b)^t.$$

Έστω ότι μια ανάθεση του C είναι η $c_t = (c_{1t_1}, c_{2t_2}, \dots, c_{nt_n})$ με κόστος

$A(t) = c_{1t_1} + c_{2t_2} + \dots + c_{nt_n}$ και $c_m = (c_{1m_1}, c_{2m_2}, \dots, c_{nm_n})$ μια αποτελεσματική με κόστος $A(m) = c_{1m_1} + c_{2m_2} + \dots + c_{nm_n}$. Άρα $A(t) \geq A(m)$. Ας θεωρήσουμε τις επόμενες αναθέσεις από τον πίνακα C'

$$c'_m = (c_{1m_1}, \dots, c_{im_i} + a, \dots, c_{sm_s} + b, \dots, c_{nm_n}) \text{ με } m_s = j \text{ και}$$

$c'_t = (c_{1t_1}, \dots, c_{it_i} + a, \dots, c_{jt_j} + b, \dots, c_{nt_n})$. Υπάρχει και η περίπτωση $c'_t = (c_{1t_1}, \dots, c_{ij} + a + b, \dots, c_{nt_n})$ η οποία αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο.

Τότε $A'(m) = A(m) + a + b$ και $A(t) + a + b = A'(t)$. Τώρα $A'(t) \geq A'(m)$.

Δηλαδή, από την i γραμμή του C' όποια συντεταγμένη και να πάρουμε η διαφορά θα είναι a ενώ από στήλη θα είναι b . Άρα αν ξεκινήσουμε με οικονομικότερη ανάθεση η καινούργια θα είναι πάλι οικονομικότερη μόνο που το κόστος A' θα δίνεται από $A' = A + a + b$. ■

Οι αναθέσεις λοιπόν διατηρούν τη διάταξή τους ως προς το κόστος και η οικονομικότερη για έναν πίνακα είναι και για τον άλλο ο οποίος προέρχεται μέσω των προηγούμενων μετασχηματισμών. Το αποτέλεσμα αυτής της παρατήρησης είναι ότι αν δημιουργήσουμε έναν καινούργιο πίνακα με αρκετά μηδενικά στοιχεία ώστε κάποιο υποσύνολο αυτών να αποτελεί οικονομικότερη ανάθεση, οι ίδιες θέσεις θα μας δίνουν την οικονομικότερη ανάθεση και για τον αρχικό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Μια εταιρεία κατασκευών έχει 4 μεγάλες μπουλντόζες τοποθετημένες σε 4 διαφορετικά σημεία. Πρέπει να μετακινηθούν σε 4 περιοχές εργασίας. Η απόσταση κάθε μπουλντόζας και εργοταξίου δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα σε χιλιόμετρα.

	εργοτάξιο 1	2	3	4
μπουλντόζα 1	90	75	75	80
2	35	85	55	65
3	125	95	90	105
4	45	110	95	115

Πως πρέπει να μετακινηθούν οι μπουλντόζες ώστε να ελαχιστοποιήσουμε την απόσταση· (Ακολουθούμε τα επόμενα βήματα.)

Βήμα 1. Αφαιρούμε 75 από την πρώτη γραμμή (το μικρότερο στοιχείο της), 35 από την δεύτερη (το μικρότερο στοιχείο της), 90 από την τρίτη (το μικρότερο στοιχείο της), και 45 από την τέταρτη (το μικρότερο στοιχείο της). Και ο πίνακας γίνεται

$$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 50 & 20 & 30 \\ 35 & 5 & 0 & 15 \\ 0 & 65 & 50 & 70 \end{pmatrix}.$$

Βήμα 2. Αφαιρούμε 5 από την τελευταία στήλη (το μικρότερο στοιχείο της). Και ο πίνακας γίνεται

$$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 25 \\ 35 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 65 & 50 & 65 \end{pmatrix}.$$

Βήμα 3. Καλύπτουμε τα μηδενικά στοιχεία με γραμμές ή και στήλες ώστε το πλήθος τους να είναι ελάχιστο. (Πιθανόν να υπάρχουν πολλές επιλογές.) Βρίσκουμε ότι χρειάζονται τρεις γραμμές.

Βήμα 4. Βρίσκουμε το ελάχιστο μεταξύ των στοιχείων που δεν είναι καλυμμένα, στο παράδειγμά μας το 20 ή το 5 ανάλογα με την επιλογή, και το προσθέτουμε στα στοιχεία που καλύπτονται από δύο ευθείες ενώ το αφαιρούμε από αυτά που δεν είναι καλυμμένα. Και ο πίνακας γίνεται

$$\begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 5 \\ 55 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 45 & 30 & 45 \end{pmatrix}.$$

5) Επαναλαμβάνουμε τις καλύψεις των μηδενικών από την αρχή.

6) Αφαιρούμε την ελάχιστη τιμή 5 των μη καλυμμένων στοιχείων και την προσθέτουμε στα στοιχεία που καλύπτονται από δύο ευθείες. Και ο πίνακας γίνεται

$$\begin{pmatrix} 40 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 40 & 30 & 40 \end{pmatrix}.$$

Βήμα 7. Από αυτόν τον πίνακα θα βρούμε την οικονομικότερη ανάθεση γιατί το ελάχιστο πλήθος των γραμμών που χρησιμοποιούμε είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του πίνακα.

Η μέθοδος που εφαρμόσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα καλείται **Ουγγαρέζικη** γιατί εκεί πρωτοεμφανίστηκε.

Η Ουγγαρέζικη μέθοδος περιγράφεται ως ακολούθως.

Μοντέλα ανάθεσης- Ουγγαρέζικη Μέθοδος

Βήματα	Σχόλια
1) Αφαιρούμε τη μικρότερη τιμή κάθε γραμμής από όλα τα στοιχεία της γραμμής.	Κάθε γραμμή έχει τουλάχιστον ένα μηδέν και όλα τα στοιχεία είναι μη αρνητικά.
2) Αφαιρούμε τη μικρότερη τιμή κάθε στήλης από όλα τα στοιχεία της στήλης.	Κάθε γραμμή και στήλη έχει τουλάχιστον ένα μηδέν και όλα τα στοιχεία είναι μη αρνητικά.
3) Καλύπτουμε όλα τα μηδενικά με ευθείες που χαράζουμε σε γραμμές και στήλες, ώστε ο αριθμός των ευθειών να είναι ελάχιστος.	Υπάρχουν συνήθως πολλοί τρόποι για τη χάραξη των ευθειών. Υπάρχουν αλγόριθμοι οι οποίοι πετυχαίνουν αυτή τη χάραξη.
4) α) Αν ο αριθμός των ευθειών είναι n , μια οικονομική ανάθεση είναι δυνατή. β) Αν ο αριθμός των ευθειών είναι μικρότερος από n , οικονομική ανάθεση δεν είναι ακόμα δυνατή.	Αν υπάρχει οικονομική ανάθεση μπορούμε να τη βρούμε σαν διάνυσμα χρησιμοποιώντας κατάλληλους αλγόριθμους ή με δοκιμές προσέχοντας να πάρουμε ένα μηδενικό από κάθε γραμμή και στήλη.
5) Βρίσκουμε τη μικρότερη τιμή που δεν καλύπτεται από τις ευθείες και την αφαιρούμε από όλα τα ακάλυπτα στοιχεία. Επίσης την προσθέτουμε στα στοιχεία που καλύπτονται από δύο ευθείες. Πηγαίνουμε πάλι στο 4.	Η θέση της οικονομικότερης ανάθεσης δεν αλλάζει σύμφωνα με θεώρημα που έχουμε δείξει.

Σχόλια της Ουγγαρέζικης μεθόδου

- 1) Ο πίνακας κόστους πρέπει να είναι τετραγωνικός.
- 2) Τα στοιχεία του πίνακα τα κάνουμε ακέραιους.
- 3) Το πρόβλημα είναι ελαχιστοποίησης. Αν δεν είναι, πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα με -1 .

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το πρόβλημα της ανάθεσης είναι ειδική περίπτωση του μοντέλου της μεταφοράς το οποίο λύνεται με τη μέθοδο Simplex.

Θεώρημα 8 *Αν ο αριθμός των ευθειών που καλύπτουν όλα τα μηδενικά είναι μικρότερος από n , τότε οικονομική ανάθεση δεν είναι δυνατή.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει οικονομική ανάθεση. Κάθε μηδενικό της βρίσκεται σε διαφορετική γραμμή και στήλη. Άρα μια οριζόντια γραμμή μπορεί να καλύψει το πολύ ένα από αυτά τα μηδενικά. Το ίδιο ισχύει και

για τις κάθετες γραμμές. Δηλαδή χρειάζονται τόσες γραμμές όσες και τα μηδενικά της οικονομικής ανάθεσης, n . ■

Θεώρημα 9 (*D. Koning and E. Eggeraty 1931*) Έστω ότι ένας $n \times n$ πίνακας ανάθεσης περιέχει $k \leq n$ το πολύ μηδενικά τα οποία έχουν την ιδιότητα να βρίσκονται σε διαφορετικές γραμμές και στήλες. Τότε όλα τα μηδενικά του πίνακα καλύπτονται από k ακριβώς οριζόντιες ή και κάθετες γραμμές.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε τα k μηδενικά που βρίσκονται σε διαφορετική γραμμή και στήλη το καθένα με ■ και καλούμε το σύνολο αυτών αρχικό σύνολο. Τα υπόλοιπα μηδενικά τα συμβολίζουμε κανονικά με 0. Θα δείξουμε ότι όλα τα μηδενικά του πίνακα μπορούν να καλυφθούν με k ευθείες. Για το σκοπό αυτό θα περιγράψουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος κατασκευάζει αυτές τις ευθείες. Κάθε τέτοια ευθεία θα διέρχεται από ένα τέτοιο ■ και κατά συνέπεια θα είναι k το πλήθος.

Έχουμε δυο βασικές περιπτώσεις: 1) Γραμμές που δεν έχουν ■ και 2) γραμμές που έχουν ■.

1) Από κάθε 0 τέτοιας γραμμής φέρνουμε κάθετη ευθεία. Κάθε τέτοια στήλη διέρχεται από ■ (εξηγήστε).

2) Από τις γραμμές που έχουν ■, κάποια από αυτά είναι ήδη καλυμμένα από τις ευθείες που ορίστηκαν στο 1) περίπτωση Α και κάποια δεν είναι καλυμμένα περίπτωση Β.

Α. Κάθε τέτοιο ■ μηδενικό το συμβολίζουμε με ♦. Τα μηδενικά 0 τέτοιας γραμμής τα συμβολίζουμε με □ και τα καλύπτουμε με κάθετες ευθείες. Κάθε τέτοια στήλη περιέχει ■ ή όχι. Αν δεν περιέχει ανταλλάσουμε το ♦ με 0 της στήλης του που όρισε την ευθεία στην 1). Τότε αυτό το □ δεν έχει ■ ούτε στη γραμμή του ούτε στη στήλη του. Άστοπο γιατί τότε θα είχαμε $k + 1$ μηδενικά ■ με αυτή την ιδιότητα.

Β. Για κάθε τέτοιο ■ καλύπτουμε τα 0 της γραμμής του με κάθετες ευθείες. Κάθε τέτοια στήλη περιέχει ■ ή όχι. Αν δεν περιέχει ανταλλάσουμε αυτό το 0 με το ■ της γραμμής του (η κάθετη ευθεία συνεχίζει να υπάρχει). ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Το πρόβλημα των συννοικεσίων.

Ένα γραφείο συννοικεσίων έχει 4 γυναίκες, Α-Β-Γ-Δ, και 5 άνδρες, 1-2-3-4-5, πελάτες, οι οποίοι επιθυμούν να παντρευτούν. Το γραφείο αριθμεί με κάποια κριτήρια τα πιθανά ταιριάσματα (ζευγάρια) μεταξύ 0 το χειρότερο και 10 το καλύτερο. Η αρίθμηση δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα

	1	2	3	4	5
A	7	4	7	3	10
B	5	9	3	8	7
Γ	3	5	6	2	9
Δ	6	5	0	4	8

Ποια αντιστοιχία θα έδινε το μέγιστο άθροισμα αρίθμησης;

Μετατρέπουμε το πρόβλημα σε πρόβλημα οικονομικότερης ανάθεσης. Ακολουθούμε την Ουγγαρέζικη μέθοδο κατά γράμμα. Επειδή οι άντρες είναι περισσότεροι προσθέτουμε και μια γυναίκα ακόμα Ε ώστε να μην ταιριάζει με κανέναν. Τα βήματα της μεθόδου δίνονται από τους ακόλουθους πίνακες.

$$\begin{pmatrix} -7 & -4 & -7 & -3 & -10 \\ -5 & -9 & -3 & -8 & -7 \\ -3 & -5 & -6 & -2 & -9 \\ -6 & -5 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 3 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Άρα το καλύτερο ταίριασμα θα είναι (Δ,1), (Β,2), (Α,3), (Ε,4) και (Γ,5).

3.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Μια αεροπορική εταιρία μεταφορών έχει στη διάθεσή της 4 αεροπλάνα και 4 εξειδικευμένους πιλότους. Το κόστος πιλότου-αεροπλάνου δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα. Βρείτε τα ζευγάρια ώστε να έχουμε την οικονομικότερη λύση.

$$\text{Πιλότοι} \begin{pmatrix} 5 & 5 & - & 2 \\ 7 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 5 & - \\ 7 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

2) Υποθέτουμε στο προηγούμενο πρόβλημα ότι υπάρχει διαθέσιμο και πέμπτο αεροπλάνο με κόστος ανά πιλότο 2-1-2-8 αντίστοιχα. Το νέο αεροπλάνο θα αντικαταστήσει ένα προηγούμενο αν αυτό δικαιολογείται οικονομικά. Βρείτε την οικονομικότερη επιλογή.

3) Ένας προπονητής μιας ομάδας baseball έχει 9 παίκτες να τοποθετήσει σε 9 θέσεις. Κάθε παίκτης βαθμολογείται από 0 έως 25, ανάλογα με την επίδοσή του, για κάθε θέση. Τα αποτελέσματα της βαθμολογίας δίνονται από τον ακόλουθο πίνακα. Βρείτε την καλύτερη τοποθέτηση που μπορεί να γίνει.

	<i>A</i>	<i>B</i>	Γ	Δ	<i>E</i>	<i>Z</i>	<i>H</i>	Θ	<i>I</i>	
1	20	15	10	10	17	23	25	5	15	
2	10	10	12	15	9	7	8	7	8	
3	12	9	9	10	10	5	7	13	9	
4	13	14	10	15	15	5	8	20	10	
Θέσεις	5	12	13	10	15	14	5	9	20	10
6	15	14	15	16	15	5	10	20	10	
7	7	9	12	12	7	6	7	15	12	
8	5	6	8	8	5	4	5	10	7	
9	5	6	8	8	5	4	5	10	7	

4) Δείξτε ότι με τη μέθοδο της Ουγκαρίας βρίσκουμε την αποτελεσματικότερη ανάθεση μετά από πεπερασμένα βήματα.

5) Μια αεροπορική εταιρεία προσφέρει πτήσεις με επιστροφή μεταξύ δύο πόλεων *A* και *B*. Τα πλήρωμα από την πόλη *A* (*B*) που πετά στην *B* (*A*) πρέπει να επιστρέψει στην πόλη που ήρθε με κάποια άλλη πτήση αργότερα είτε την ίδια μέρα είτε την επόμενη. Το πλήρωμα της πόλης *A* μπορεί να επιστρέψει μόνο αν υπάρχει χρονικό περιθώριο τουλάχιστον 90 λεπτών μεταξύ της άφιξης τους στην *B* και της αναχώρησης της επόμενης πτήσης. Ο επόμενος πίνακας δίνει τους χρόνους άφιξης και αναχώρησης. Σας ανατίθεται το πρόβλημα του καθορισμού ζευγών πτήσεων από *A* προς *B* και ανάποδα ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο συνολικός χρόνος παραμονής των πληρωμάτων.

	Από	Προς		Από	Προς
Πτήση	<i>A</i>	<i>B</i>	Πτήση	<i>B</i>	<i>A</i>
1	6 : 00	8 : 30	10	7 : 30	9 : 30
2	8 : 15	10 : 45	20	9 : 15	11 : 15
3	13 : 30	16 : 00	30	16 : 30	18 : 30
4	15 : 00	17 : 30	40	20 : 00	22 : 00

Λύστε το προηγούμενο πρόβλημα με τη μέθοδο της ανάθεσης.

6) Ένα καλλιτεχνικό γραφείο έχει 4 ρόλους, *A*-*B*- Γ - Δ , και 5 ηθοποιούς, 1-2-3-4-5, οι οποίοι επιθυμούν να βρουν εργασία. Το γραφείο αριθμεί, σύμφωνα με τα προσόντα του κάθε ηθοποιού, τις πιθανές αναθέσεις μεταξύ 0 τη χειρότερη και 10 την καλύτερη. Η αριθμηση δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα

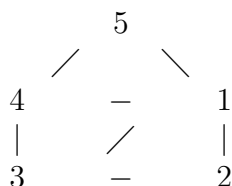
	1	2	3	4	5
<i>A</i>	4	4	7	0	10
<i>B</i>	5	9	10	8	7
Γ	3	5	6	2	9
Δ	6	0	0	4	9

Ποια είναι η προτασή σας για τις πιθανές αναθέσεις ρόλων;

Κεφάλαιο 4

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΩΝ

Έστω το επόμενο σχήμα το οποίο αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό σημείων, τα οποία θα ονομάζουμε κορυφές, και ευθυγράμμων τμημάτων, τα οποία θα ονομάζουμε πλευρές.



Ας αναρωτηθούμε τι πληροφορίες θα μπορούσε να περιέχει το προηγούμενο σχήμα. Θα μπορούσε να παριστά το οδικό δίκτυο σύνδεσης κάποιων πόλεων. Επίσης, τις συνδέσεις μίας μικρής αεροπορικής εταιρείας. Το διάγραμμα ενός αλγορίθμου ή τα σύνορα των νομών Ιωαννίνων, Αρτας, Πρέβεζας, Θεσπρωτίας και Αλβανίας. Πολύ συχνά εκφράζει την ιεραρχία ή τις σχέσεις μεταξύ μίας ομάδας ανθρώπων, κρατών, ή εταιρειών. Παρατηρούμε ότι θα μπορούσε να περικλείει ποικιλία πληροφοριών.

Είναι γνωστό ότι το γράφημα (graph) μίας συνάρτησης είναι η εικόνα της αποτυπωμένη στο καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων όπου αυτή ορίζεται και προφανώς παρέχει πληροφορίες για τη συνάρτηση. Με τη λέξη γράφο (graph) περιγράφουμε ένα διαφορετικό είδος δομής η οποία μπορεί να μεταφραστεί σε συλλογή πληροφοριών. Σαν σχήμα ο γράφος είναι απλός, αποτελείται από κορυφές και πλευρές που τις συνδέουν. Το σημαντικότερο μέρος του είναι οι πληροφορίες που αναπαριστά.

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε στοιχεία από τη θεωρία γράφων καθώς και εφαρμογές τους που σχετίζονται με τη γραμμική άλγεβρα. Επίσης οι γράφοι μας θα είναι κατευθυνόμενοι, δηλαδή τα ευθύγραμμα τμήματα που

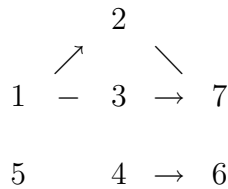
υπεισέρχονται στο γράφο θα είναι εφοδιασμένα με κατεύθυνση.

Ορισμός 10 Ένας κατευθυνόμενος γράφος είναι ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων P_1, \dots, P_n που καλούνται κορυφές και μία συλλογή διατεταγμένων ζευγών (P_i, P_j) που καλούνται πλευρές.

Συνήθως συμβολίζουμε $P_i \rightarrow P_j$ αντί (P_i, P_j) . Επίσης αντί για $P_i \longleftrightarrow P_j$ γράφουμε $P_i - P_j$.

Σημείωση Ένας γράφος μπορεί να έχει πολλές συνιστώσες, δηλαδή να αποτελείται από μικρότερους γράφους ώστε να μην υπάρχουν τρόποι για κάποιες κορυφές να ενωθούν μεταξύ τους. Γράφοι οι οποίοι αποτελούνται από μια συνιστώσα καλούνται **συνεκτικοί**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Μη συνεκτικός γράφος με τρεις συνιστώσες.



Εξετάζοντας δύο μεγάλους γράφους πιθανότατα θα αναρωτηθούμε αν είναι ισοδύναμοι. Δηλαδή αν εκφράζουν την ίδια πληροφορία. Δυστυχώς δεν είναι εύκολο να απαντηθεί αυτό το ερώτημα. Προφανώς αν ο ένας έχει κάποια ιδιότητα που δεν έχει ο άλλος, τότε δεν είναι ισοδύναμοι. Υπάρχουν αλγόριθμοι οι οποίοι απαντούν σ' αυτό το ερώτημα για ειδικές κατηγορίες γράφων όπως τα δέντρα. Δεν θα ασχοληθούμε με αυτό το πρόβλημα διότι ξεφεύγει από το αντικείμενό μας.

Εργαζόμενοι πάνω σε μεγάλους γράφους δεν είναι δυνατόν να τους μελετήσουμε απλά κοιτάζοντας τους. Το κύριο εργαλείο μελέτης είναι ο ηλεκτρονικός υπολογιστής. Θα πρέπει λοιπόν να μεταφράσουμε την πληροφορία που απεικονίζει ο συγκεκριμένος γράφος σε μια γλώσσα η οποία να μπορεί να μετατραπεί στην γλώσσα του υπολογιστή. Η πιο κοντινή γλώσσα του υπολογιστή είναι τα μαθηματικά και αυτός είναι ο σκοπός αυτής της ενότητας. Ένας αλγεβρικός τρόπος να περιγραφεί ένας γράφος είναι για κάθε ζεύγος κορυφών του (i, j) να δίνουμε το νούμερο 1 αν υπάρχει πλευρά που να ενώνει την i και j με κατεύθυνση από την i στην j και 0 διαφορετικά. Σημειώνουμε ότι στο ζεύγος (i, i) θα δίνουμε το νούμερο 0 εκτός αν υπάρχει σύνδεση, ονομαζόμενη θηλιά, από την i στον εαυτό της. Η προηγούμενη πληροφορία θα περιέχεται στον **πίνακα γειτνίασης**

$$M = (a_{ij}).$$

Ο Πατέρας δεν επηρεάζει τη Μητέρα κατευθείαν αλλά μπορεί να το κάνει μέσο του Γ :

$$\Pi \rightarrow \Gamma \rightarrow M$$

Δηλαδή έχουμε μία σύνδεση δύο βημάτων. Αντίστοιχα ορίζεται σύνδεση k -βημάτων.

Θεώρημα 13 Έστω A ένας πίνακας γεινίασης ενός κατευθυνόμενου γράφου. Το $i - j$ στοιχείο του A^n δίνει το πλήθος των μήκους n δρόμων από την κορυφή i στην j για $n > 1$.

Απόδειξη. Ο αριθμός $a_{ik}a_{kj}$ εκφράζει τις δύο-δρόμους συνδέσεις από την i στην j μέσω της k . Άρα το άθροισμα $\sum_k a_{ik}a_{kj}$ εκφράζει όλες τις δύο-δρόμους συνδέσεις από την i στην j και αυτό είναι το $i - j$ στοιχείο του A^2 . Αντίστοιχα, ο αριθμός $a_{ik}a_{ks}\dots a_{rj}$ εκφράζει τις n -δρόμους συνδέσεις από την i στην j μέσω των κορυφών k, s, \dots, r . Το άθροισμα

$$\sum_k \sum_s \dots \sum_r a_{ik}a_{ks}\dots a_{rj}$$

εκφράζει όλες τις n -δρόμων συνδέσεις από την i στην j και αυτό είναι το $i - j$ στοιχείο του A^n . ■

Παρατηρούμε σαυτή την κατηγορία των πινάκων πόσο φυσιολογικά συνδέεται ο τρόπος που ορίζεται το γινόμενο των πινάκων με το αποτέλεσμα του γινομένου.

Συμβολισμός Το $i - j$ στοιχείο του A^n συμβολίζεται με $a_{ij}^{(n)}$.

Η k συνιστώσα του διανύσματος $A^n \mathbf{1}$ δίνει το πλήθος όλων των n -δρόμων της k κορυφής.

Υπάρχει άλλος ένας πίνακας που σχετίζεται με τις κορυφές ενός γράφου. Είναι ο **πίνακας προσπελασιμότητας** R (reachability). Ένα στοιχείο του, r_{ij} , είναι 1 αν υπάρχει τρόπος (όχι απαραίτητα κατευθείαν) που να συνδέει την i με την j κορυφή. Θα περίμενε κανείς ότι ο R ορίζεται όταν είναι γνωστές όλες οι δυνάμεις του πίνακα M , το ακόλουθο θεώρημα όμως εκφράζει ότι δεν χρειάζονται όλες οι δυνάμεις.

Θεώρημα 14 Εάν ο γράφος έχει n κορυφές και υπάρχει δρόμος από την i κορυφή στην j τότε αυτός ο δρόμος θα δίνεται από μία σύνδεση μήκους το πολύ $n - 1$.

Άρα ο R καθορίζεται από τις δυνάμεις M, M^2, \dots, M^{n-1} .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Έστω M ο πίνακας συνδέσεων μίας τοπικής αεροπορικής εταιρείας μεταξύ τεσσάρων πόλεων:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο προηγούμενος πίνακας δίνει τις κατευθείαν συνδέσεις της εταιρείας. Ο M^2 δίνει το πλήθος των συνδέσεων με μια ενδιάμεση στάση και ο M^3 με δυο ενδιάμεσους σταθμούς. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να βρίσκουμε αν υπάρχουν συνδέσεις μεταξύ δυο πόλεων μεγάλων εταιρειών μεταφορών και με πόσους ενδιάμεσους σταθμούς.

4.1 Κλίκες

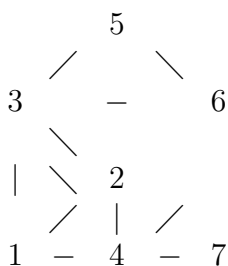
Η λέξη κλίκα η οποία στο καθημερινό λεξιλόγιο αποφεύγεται λόγω του νοήματος που της έχει αποδοθεί, στους γράφους εκφράζει μια ειδική κατηγορία από αυτούς και έχει ιδιαίτερες εφαρμογές όπως θα δούμε.

Ορισμός 15 Ένα υποσύνολο ενός κατευθυνόμενου γράφου καλείται κλίκα αν ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες:

- 1) περιέχει τουλάχιστον τρεις κορυφές,
- 2) για κάθε ζευγάρι κορυφών έχουμε και τις δυο συνδέσεις,
- 3) το υποσύνολο αυτό είναι το μεγαλύτερο δυνατόν (αν προσθέσουμε μία κορυφή δεν ικανοποιείται η προηγούμενη ιδιότητα).

Δηλαδή μία κλίκα είναι ένα υποσύνολο με την καλύτερη δυνατή σύνδεση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Στον επόμενο γράφο τα υποσύνολα $\{1,2,3,4\}$ και $\{3,5,6\}$ αποτελούν κλίκες.



Επομένως σ' έναν κατευθυνόμενο γράφο πιθανόν να υπάρχουν πολλές κλίκες με κοινές κορυφές. Κλίκες εύκολα αναγνωρίζονται σε μικρούς γράφους,

αλλά δεν ισχύει το ίδιο για μεγάλους. Η επόμενη μέθοδος βρίσκει ποιες κορυφές ανήκουν σε κλίκες.

Έστω $S = (s_{ij})$ ο πίνακας που ορίζεται ως εξής:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & i \leftrightarrow j, i \neq j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ο S μπορεί να ορισθεί και από τον M αρκεί να μηδενίσουμε τα m_{ij} για τα οποία ισχύει ότι

$$m_{ij} \neq m_{ji}$$

Θεώρημα 16 Έστω $s_{ij}^{(3)}$ το ij στοιχείο του πίνακα S^3 . Τότε η κορυφή P_i ανήκει σε κάποια κλίκα αν το στοιχείο $s_{ii}^{(3)}$ είναι μη-μηδενικό.

Απόδειξη. Αν το στοιχείο $s_{ii}^{(3)}$ είναι μη-μηδενικό, τότε υπάρχει τουλάχιστον μία σύνδεση 3-βημάτων από την i στον εαυτό της. Δηλαδή $s_{ik}^{(2)} > 0$ και $s_{ki} = 1$. Από $s_{ik}^{(2)} > 0$ έχουμε ότι $s_{ij} = 1 = s_{jk}$, για κάποιο j . Έστω ότι αυτή είναι η

$$i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$$

Επειδή ο πίνακας S είναι συμμετρικός θα έχουμε επίσης $i - j - k - i$. Το τελευταίο δηλώνει ότι το υποσύνολο $\{i, j, k\}$ είναι υποσύνολο κάποιας κλίκας. Το αντίστροφο είναι ακριβώς το ίδιο. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Έστω ο επόμενος πίνακας γειννιάσης:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, S^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

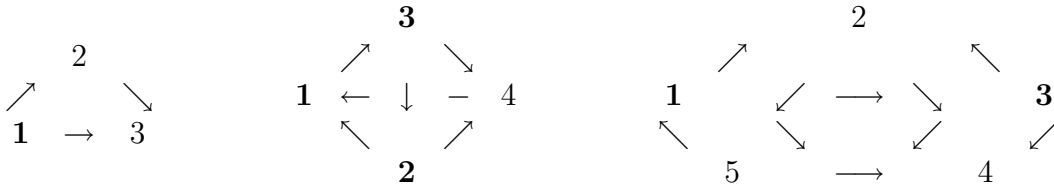
Κατευθείαν βλέπουμε ότι οι κορυφές 1, 2 και 4 ανήκουν σε κλίκα και άρα από μόνες τους αποτελούν κλίκα.

4.2 Κατευθυνόμενοι γράφοι κυριαρχίας

Οι κορυφές μιας κλίκας έχουν όλες τις ίδιες ιδιότητες. Δηλαδή δεν υπάρχει κορυφή με κάποιο προνόμιο. Αυτό δεν ισχύει πάντα όπως βλέπουμε στο επόμενο παράδειγμα: Ας θεωρήσουμε τις ομάδες κάποιου κυπέλλου σαν κορυφές και τα αποτελέσματα των αγώνων να περιγράφονται από την κατεύθυνση $i \rightarrow j$ (η i νίκησε την j), τότε μιλάμε για κατευθυνόμενους γράφους κυριαρχίας. Εδώ κάποια κορυφή έχει προνομιακές ιδιότητες εν σχέση με τις άλλες.

Ορισμός 17 Ένας κατευθυνόμενος γράφος κυριαρχίας είναι αυτός ο οποίος έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε ζεύγος (i, j) ισχύει αποκλειστικά $i \rightarrow j$ ή $j \rightarrow i$ (όχι και τα δυο).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

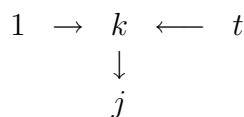


Οι γραμμοσκιασμένες κορυφές και στα τρία παραδείγματα έχουν την ιδιότητα ότι με ένα ή δυο βήματα σύνδεση μπορούμε να πάμε σε οποιαδήποτε κορυφή θέλουμε. Αυτό δεν είναι τυχαίο σ' αυτούς τους γράφους και οι κορυφές με αυτήν την ιδιότητα λέμε ότι βρίσκονται σε **πλεονεκτική θέση**.

Θεώρημα 18 Σε κάθε κατευθυνόμενο γράφο κυριαρχίας υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή σε πλεονεκτική θέση.

Απόδειξη. Έστω ότι ο γράφος έχει n κορυφές και $M = (m_{ij})$ είναι ο πίνακάς του. Έστω $a_i = \sum_{j=1}^n m_{ij} + \sum_{j=1}^n m_{ij}^{(2)}$

Δηλαδή το a_i δίνει όλες τις κατευθείαν και 2-βήματα συνδέσεις της κορυφής i . Επιλέγουμε την κορυφή με το μεγαλύτερο a_i . Έστω ότι αυτή είναι η 1. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει κατευθείαν ή 2-δρόμων σύνδεση από την 1 στην t . Άρα θα υπάρχει $t \rightarrow 1$. Έστω τώρα κορυφή k ώστε $1 \rightarrow k$. Επειδή δεν μπορούμε να έχουμε $k \rightarrow t$ θα έχουμε $t \rightarrow k$. Δηλαδή για κάθε κορυφή k που συνδέεται η 1 κατευθείαν με την k , θα υπάρχει κατευθείαν σύνδεση μεταξύ t και k . Επίσης η t θα έχει 2-δρόμων σύνδεση με κάθε κορυφή με την οποία υπάρχει 2-δρόμων σύνδεση από την 1. Άρα η t έχει $a_t > a_1$, άτοπο. ■



Σχόλιο Το προηγούμενο θεώρημα μας παρέχει και έναν τρόπο να βρίσκουμε τέτοιες κορυφές συγκρίνοντας τα αντίστοιχα a_i .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Τα αποτελέσματα ενός κυπέλλου μπάσκετ μεταξύ 5 ομάδων δίνονται από τον ακόλουθο πίνακα.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Θα κατατάξουμε τις ομάδες ανάλογα με τις επιδόσεις τους. Μελετάμε το διάνυσμα $M\mathbf{1} = (2, 3, 1, 1, 3)^t$. Επειδή έχουμε ισοβαθμία μεταξύ της δεύτερης και πέμπτης, μελετάμε το διάνυσμα $(M + M^2)\mathbf{1} = (4, 9, 2, 4, 7)^t$. Άρα η δεύτερη ομάδα έχει την καλύτερη επίδοση.

4.3 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Δείξτε ότι αν υπάρχει δρόμος μεταξύ δύο κορυφών ενός γράφου με n κορυφές τότε αυτός θα έχει μήκος το πολύ $n - 1$ αν δεν επαναλαμβάνεται καμιά κορυφή.

2) Έστω M ο πίνακας μετάβασης ενός γράφου με n κορυφές. Δείξτε ότι ο γράφος είναι συνεκτικός, αν κάθε στοιχείο του πίνακα $M + M^2 + \dots + M^{n-1}$ είναι μη-μηδενικό. Αν $M = M^t$, τότε ισχύει και το ανάποδο.

3) Βρείτε όλες τις κλίκες στον επόμενο γράφο και πίνακα γειτνίασης:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \longrightarrow & 2 & \longleftarrow & 3 \\ | & / & & \backslash & | \\ 8 & & & & 4 \\ | & \backslash & & / & | \\ 7 & \longrightarrow & 6 & - & 5 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Τα αποτελέσματα 5 ομάδων δίνονται ως ακολούθως:

η 1 νίκησε τις 2, 3, 4

η 2 νίκησε τις 3, 5

η 3 νίκησε τις 4, 5

η 4 νίκησε την 2

η 5 νίκησε τις 1, 4

Βρείτε την κατάταξη των ομάδων με τη μέθοδο των γράφων.

5) Έστω ένας επίπεδος συνεκτικός γράφος. Θα καλείται **έδρα** του κάθε υποσύνολο του επιπέδου το οποίο έχει την ακόλουθη ιδιότητα: δυο τυχαία σημεία αυτού του υποσυνόλου μπορούν να ενωθούν με μια συνεχή καμπύλη

η οποία δεν τέμνει ούτε πλευρά ούτε κορυφή του γράφου. Το υποσύνολο που περιέχει όλα τα σημεία 'εκτός' του γράφου καλείται άπειρη έδρα.

Δώστε παράδειγμα γράφου με μία έδρα. Έστω Π ο αριθμός των πλευρών, K ο αριθμός των κορυφών, και E ο αριθμός των εδρών. Δείξτε τον επόμενο **τύπο του Euler**:

$$K - \Pi + E = 2$$

Υπόδειξη: επαγωγή στο Π . Σημειώστε ότι ο τύπος του Euler είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στα Μαθηματικά και η γενίκευσή του υπεισέρχεται σε προχωρημένους κλάδους των Μαθηματικών.

6) Κάποια εταιρεία αποτελείται από n διευθυντικά στελέχη $\{1, 2, \dots, n\}$. Η επιρροή - επιβολή- του ενός στον άλλο εκφράζεται ως εξής: Ο i είναι ανώτερος του j , αν $n - 1 \geq i > j$, και ο $i < n$ είναι ανώτερος του n . Δείξτε ότι υπάρχει στέλεχος το οποίο είναι ανώτερο όλων. Αν $M = (m_{i,j})$ είναι ο πίνακας ιεραρχίας όπως ορίστηκε προηγουμένως και $M^k = (m_{i,j}^{(k)})$, δείξτε ότι $m_{i+1,i}^{(k)} = 0$ για $k > 1$ και $m_{i+2,i}^{(k)} = 0$ για $k > 2$. Κάντε μια πρόγνωση για το $m_{i+t,i}^{(k)} = 0$ για $k > t$.

Κεφάλαιο 5

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Έστω ότι έχουμε να λύσουμε ένα $n \times n$ γραμμικό σύστημα για μεγάλο n . Θεωρητικά το σύστημα λύνεται με κάποια από τις γνωστές μεθόδους. Στην πράξη όμως η λύση του μπορεί να είναι χρονοβόρα λόγω του μεγάλου πλήθους των πράξεων και το τελικό αποτέλεσμα να μην ανταποκρίνεται στην πραγματική λύση λόγω του μεγάλου πλήθους των στρογγυλοποιήσεων που υποχρεωτικά πρέπει να γίνουν. Αυτό σημαίνει ότι απαιτούνται πολλές πράξεις για τον υπολογισμό του αντιστρόφου πίνακα του οποίου η εύρεση πολλές φορές είναι ιδιαίτερα δύσκολη. Για αυτόν τον λόγο, υπάρχουν διάφορες υπολογιστικές μέθοδοι οι οποίες δίνουν μία καλή προσέγγιση της λύσης. Δηλαδή η λύση δίνεται σαν το όριο κάποιας ακολουθίας, οπότε η προσέγγιση εξαρτάται από τον όρο της ακολουθίας. Θα περιγράψουμε δύο από αυτές τις μεθόδους, του **Jacobi** και των **Gauss-Seidel**. Η δεύτερη είναι παραλλαγή της πρώτης.

Έστω ότι ο πίνακας των συντελεστών είναι ο A και το σύστημα δίνεται από $Au = b$. Εάν $A = B - C$ ώστε να μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τον B^{-1} , τότε $Bu = Cu + b$ και

$$u = B^{-1}Cu + B^{-1}b$$

Αντικαθιστούμε στο δεξιό μέλος το u οπότε έχουμε

$$u = B^{-1}C(B^{-1}Cu + B^{-1}b) + B^{-1}b$$

Μετά από k -βήματα

$$u = (B^{-1}C)^k u + (B^{-1}C)^{k-1} B^{-1}b + \dots + (B^{-1}C) B^{-1}b + B^{-1}b$$

Αν ο $(B^{-1}C)^k$ είναι περίπου ο μηδενικός πίνακας (δηλαδή συγκλίνει στον μηδενικό πίνακα), τότε

$$u \approx (B^{-1}C)^{k-1} B^{-1}b + \dots + (B^{-1}C) B^{-1}b + B^{-1}b$$

Παρατηρούμε ότι το δεξιό μέλος δεν εξαρτάται από μεταβλητή εκτός από το k . Δηλαδή βρήκαμε ένα τρόπο να προσεγγίσουμε τη λύση μας όσο κοντά θέλουμε. Ουσιαστικά έχουμε αποδείξει το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 19 Έστω το γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους $Ax = b$. Έστω $A = B - C$ ώστε ο πίνακας B να έχει αντίστροφο. Αν ο πίνακας $(B^{-1}C)^k$ συγκλίνει στον μηδενικό τότε ο επόμενος πίνακας συγκλίνει στη λύση του συστήματος

$$(B^{-1}C)^{k-1} B^{-1}b + \dots + (B^{-1}C) B^{-1}b + B^{-1}b$$

Επειδή δεν είναι εύκολη υπόθεση να δείξουμε ότι ο $(B^{-1}C)^k$ συγκλίνει στον μηδενικό πίνακα, θεωρούμε το επαναληπτικό βήμα

$$Bu_{k+1} = Cu_k + b$$

Αν οι πίνακες B και C είναι απλοί (εύκολοι στις πράξεις), τότε και το u_{k+1} υπολογίζεται εύκολα. Θέλουμε τώρα η ακολουθία u_k να συγκλίνει στο διάνυσμα u . Αυτό σημαίνει ότι η διαφορά

$$Bu - Bu_{k+1} = Cu - Cu_k \implies (u - u_{k+1}) = B^{-1}C(u - u_k)$$

συγκλίνει στο $\mathbf{0}$. Οι διαφορές αυτές ορίζουν μία ακολουθία: $d_k = u - u_k$ η οποία δίνεται από

$$d_k = (B^{-1}C)^k d_0$$

Αν ο $B^{-1}C$ διαγωνοποιείται, δηλαδή $B^{-1}C = PDP^{-1}$ με D διαγώνιο πίνακα, τότε

$$(B^{-1}C)^k = PD^k P^{-1}$$

Οπότε ο τελευταίος πίνακας θα συγκλίνει αν τα στοιχεία του D έχουν απόλυτο τιμή μικρότερη από 1.

Θεώρημα 20 Η επαναληπτική μέθοδος που περιγράφεται πιο πάνω συγκλίνει αν οι ιδιοτιμές του $(B^{-1}C)$ έχουν απόλυτο τιμή μικρότερη από τη μονάδα.

Αν το B είναι το διαγώνιο μέρος του A , τότε η μέθοδος είναι του Jacobi.

Αν το B είναι το κάτω τριγωνικό μέρος του A , τότε η μέθοδος είναι των Gauss-Seidel.

Τα διαγώνια στοιχεία του A πρέπει να είναι μη-μηδενικά.

5.1 Μέθοδος Jacobi

Λύνουμε κάθε μία από τις εξισώσεις ως προς διαφορετικό άγνωστο. Ξεκινώντας από κάποιο διάνυσμα u_0 το οποίο θεωρούμε ότι βρίσκεται κοντά στη λύση το αντικαθιστούμε στις προηγούμενες εξισώσεις και παίρνουμε ένα νέο διάνυσμα u_1 . Αυτό το αντικαθιστούμε πάλι στις εξισώσεις και ορίζουμε τον δεύτερο όρο u_2 της ακολουθίας. Μετά από αρκετές επαναλήψεις έχουμε μία καλή προσέγγιση της λύσης όπως εκφράζει το επόμενο θεώρημα.

Ας δούμε πρώτα ένα παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\begin{array}{llll} 6x + 2y - z = 4 & x = \frac{4-2y+z}{6} & u_0 = (1, 1, 1) & u_3 = (1.975, -1.01, 6.125) \\ x + 5y + z = 3 & y = \frac{3-x-z}{5} & u_1 = (1/2, 1/5, 6) & u_4 = (2.02416, -1.02, 6.015) \\ 2x + y + 4z = 27 & z = \frac{27-2x-y}{4} & u_2 = (1.6, -0.7, 6.45) & u_5 = (2.009, -1.008, 6.07) \end{array}$$

Μετά από έξι επαναλήψεις βλέπουμε ότι η λύση προσεγγίζει την (2, -1, 6).

Το επόμενο θεώρημα είναι αντικείμενο της αριθμητικής γραμμικής άλγεβρας και το αναφέρουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 21 Έστω γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους. Εάν για κάθε γραμμή του πίνακα των συντελεστών η απόλυτη τιμή του διαγώνιου στοιχείου είναι μεγαλύτερη του αθροίσματος των απολυτών τιμών των άλλων στοιχείων της ίδιας γραμμής, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση. Η επαναληπτική μέθοδος του Jacobi συγκλίνει σ' αυτή τη λύση, για οποιαδήποτε αρχική τιμή.

Σχόλια : 1) Για κάποια συστήματα μπορεί να είναι απαραίτητο να αναδιατάξουμε τις εξισώσεις ώστε η προηγούμενη συνθήκη να μπορεί να εφαρμοσθεί.

2) Όσο πιο ακριβής είναι η αρχική τιμή, τόσο πιο γρήγορα συγκλίνει η μέθοδος.

5.2 Μέθοδος Gauss-Seidel

Είναι όπως η προηγούμενη μόνο που η τελευταία τιμή κάθε μεταβλητής αντικαθίσταται αμέσως. Αυτό γίνεται για εξοικονόμηση μνήμης στον υπολογιστή, αφού κάθε παλαιά συνιστώσα αντικαθίσταται από τη νέα.

Στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε:

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = B^{-1} \left(C \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} + b \right) =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{3}{40} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 27 \end{pmatrix} \right) =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{15}y - \frac{7}{30}z + \frac{7}{15} \\ \frac{3}{20}y - \frac{1}{40}z + \frac{63}{10} \end{pmatrix}$$

$x_0 = y_0 = z_0 = 1$, $x_1 = 0.5$, $y_1 = 0.3$, $z_1 = 6.4250$ και $x_2 = 1.6375$, $y_2 = -1.0125$, $z_2 = 6.1844$.

Στο παράδειγμά μας, αυτή η μέθοδος δίνει πιο γρήγορα σύγκλιση. Οι επόμενοι πίνακες δείχνουν τη διαφορά των δυο μεθόδων.

Jacobi Method

Επανάληψη	x	y	z
0	1	1	1
1	.5	.2	6
2	1.6	-0.7	6.45
3	1.975	-1.01	6.125
4	2.024167	-1.02	6.015
5	2.009167	-1.007833	5.992917
6	2.001431	-1.000417	5.997375

Gauss-Seidel Method

Επανάληψη	x	y	z
0	1	1	1
1	.5	.3	6.425
2	1.6375	-1.0125	6.184375
3	2.034896	-1.043854	5.993516
4	2.013537	-1.001411	5.993584
5	1.999401	-0.998597	5.999949
6	1.999524	-0.9998945	6.000212

Σημείωση Η λύση με απαλοιφή (Gauss) χρειάζεται $(4n^3 + 9n^2 - 7n)/6$ πράξεις και η προηγούμενη $2n^2 - n$ για κάθε επανάληψη. Για $n = 300$ με τη μέθοδο Gauss θέλουμε 18.000.000 ενώ με Gauss-Seidel 180.000 .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Gauss-Seidel στο επόμενο παράδειγμα.

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 - x_3 &= 18 \\ x_1 + 15x_2 + x_3 &= -12 \\ -x_1 + x_2 + 20x_3 &= 17 \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & 15 & 0 \\ -1 & 1 & 20 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Έχουμε λοιπόν $Bu_{k+1} = Cu_k + b$. Δηλαδή

$$\begin{aligned} 10y_1 &= -x_2 + x_3 + 18 \\ y_1 + 15y_2 &= -x_3 - 12 \\ -y_1 + y_2 + 20y_3 &= 17 \end{aligned}$$

Ξεκινώντας με $(0, 0, 0)$ έχουμε

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.8 \\ -0.92 \\ 0.986 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.9906 \\ -0.9984 \\ 0.9995 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.9998 \\ -0.9999 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Το επόμενο θεώρημα θα εφαρμοσθεί πιο κάτω στα δίκτυα και είναι και αυτό αντικείμενο της αριθμητικής γραμμικής άλγεβρας.

Θεώρημα 22 Έστω A πραγματικός συμμετρικός πίνακας. Αν τα διαγώνια στοιχεία του A είναι θετικά, η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει αν ο A έχει θετικές ιδιοτιμές.

5.3 Διαγωνοποίηση Συμμετρικών Πινάκων

Σαυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε συμμετρικούς πίνακες και θα υπενθυμίσουμε γνωστές έννοιες από τη γραμμική άλγεβρα. Με $M(n \times n, \mathbf{R})$ θα συμβολίζουμε το διανυσματικό χώρο των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από τους πραγματικούς. Έστω το σύνολο $\sum(n, \mathbf{R}) = \{A \mid A \in M(n \times n, \mathbf{R}) \text{ και } A \text{ είναι συμμετρικός}\}$. Το σύνολο $\sum(n, \mathbf{R})$ είναι υπόχωρος του $M(n \times n, \mathbf{R})$.

Ορισμός 23 Έστω $A, B \in \sum(n, \mathbf{R})$. Θα πούμε ότι A και B είναι ορθογώνια όμοιοι, αν υπάρχει ορθογώνιος P ώστε $B = P^t A P$.

Υπενθύμιση A ορθογώνιος αν $AA^t = A^t A = I \iff A^{-1} = A^t \Rightarrow |A| = \pm 1$.

Λήμμα 24 Οι ιδιοτιμές ενός πραγματικού συμμετρικού πίνακα είναι όλες πραγματικές.

Απόδειξη. Έστω $Ae = \lambda e \Rightarrow (Ae)^t = \lambda e^t \Rightarrow e^t A = \lambda e^t \Rightarrow (\bar{e}^t \bar{A}) = \bar{\lambda} \bar{e}^t \Rightarrow (\bar{e}^t A) = \bar{\lambda} \bar{e}^t \Rightarrow \bar{e}^t Ae = \bar{\lambda} \bar{e}^t e$. Επίσης, $Ae = \lambda e \Rightarrow \bar{e}^t Ae = \lambda \bar{e}^t e$. Άρα, $(\lambda - \bar{\lambda}) \bar{e}^t e = 0$. Επειδή η παράσταση $\bar{e}^t e$ είναι το τετράγωνο της νόρμας του διανύσματος και είναι θετικός αριθμός, έχουμε ότι $(\lambda - \bar{\lambda}) = 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$ ■

Λήμμα 25 Σε διαφορετικές ιδιοτιμές ενός πραγματικού συμμετρικού πίνακα αντιστοιχούν κάθετοι ιδιόχωροι.

Απόδειξη. Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές και u_1, \dots, u_n τα ιδιοδιανύσματα. Πρέπει $u_i^t u_j = 0$. $Au_j = \lambda_j u_j \Rightarrow u_j^t A = \lambda_j u_j^t \Rightarrow u_j^t A u_i = \lambda_j u_j^t u_i \Rightarrow \lambda_i u_j^t u_i = \lambda_j u_j^t u_i$. Δηλαδή $(\lambda_i - \lambda_j) u_j^t u_i = 0 \Rightarrow u_j^t u_i = 0$. ■

Πόρισμα 26 Αν οι ιδιοτιμές ενός πραγματικού συμμετρικού πίνακα είναι όλες διάφορες μεταξύ τους τότε τα ιδιοδιανύσματα τους είναι ορθογώνια.

Θεώρημα 27 Αν A είναι πραγματικός συμμετρικός πίνακας με διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε ο A είναι ορθογώνια όμοιος με διαγώνιο πίνακα.

Απόδειξη. Αφού ο A είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε αν P ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα ο P θα είναι ορθογώνιος. ■

Θεώρημα 28 Αν A πραγματικός συμμετρικός πίνακας. Τότε υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P ώστε $PAP^t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A (όχι αναγκαστικά διακεκριμένες).

Φασματικό Θεώρημα για συμμετρικούς πίνακες

Θεώρημα 29 Έστω A ένας $n \times n$ πραγματικός συμμετρικός πίνακας, τότε ο A έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- ο A έχει n πραγματικές ιδιοτιμές (μετρώντας την πολλαπλότητα της κάθε μιας χωριστά),
- η διάσταση του ιδιοχώρου κάθε πολλαπλότητας ισούται με την πολλαπλότητα της αντίστοιχης ιδιοτιμής στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο,
- οι ιδιόχωροι είναι κάθετοι μεταξύ τους,
- ο A είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε το β). Έστω ότι η ιδιοτιμή λ_1 έχει πολλαπλότητα k και u_1 είναι ένα ιδιοδιανύσμα με μήκος 1. Βρίσκουμε μια ορθοκανονική βάση του R^n έστω την $\{u_1, v_1, \dots, v_{n-1}\}$. Ας υποθέσουμε ότι τα προηγούμενα διανύσματα είναι γραμμένα σαν στήλες και ας ονομάσουμε P τον πίνακα με στήλες αυτά τα στοιχεία.

$$P = (u_1, v_1, \dots, v_{n-1})$$

Ο πίνακας P είναι ορθογώνιος, $P^t = P^{-1}$. Τότε $P^t = (u_1, v_1, \dots, v_{n-1})^t = \begin{pmatrix} u_1^t \\ v_1^t \\ \vdots \\ v_{n-1}^t \end{pmatrix}$. Επίσης $u_1^t A v_i = (A u_1)^t v_i = \lambda_1 u_1^t v_i = 0$. Άρα

$$A_1 = P^t A P = P^t (A u_1, A v_1, \dots, A v_{n-1}) = \begin{pmatrix} u_1^t \\ v_1^t \\ \vdots \\ v_{n-1}^t \end{pmatrix} (A u_1, A v_1, \dots, A v_{n-1}) = \begin{pmatrix} u_1^t A u_1 & u_1^t A v_1 & \dots & u_1^t A v_{n-1} \\ v_1^t A u_1 & v_1^t A v_1 & \dots & v_1^t A v_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n-1}^t A u_1 & v_{n-1}^t A v_1 & \dots & v_{n-1}^t A v_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

Εδώ B_1 είναι ένας $(n-1) \times (n-1)$ συμμετρικός πίνακας του οποίου το ij στοιχείο είναι το $v_i^t A v_j$. Ο πίνακας A_1 και ο A είναι ορθογώνια όμοιοι και κατα συνέπεια έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Άρα:

$$|A_1 - \lambda I_n| = (\lambda_1 - \lambda) |B_1 - \lambda I_{n-1}|$$

Αν η ιδιοτιμή λ_1 έχει πολλαπλότητα $k \geq 2$, τότε $|B_1 - \lambda_1 I_{n-1}| = 0$ και η πολλαπλότητα της λ_1 στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο $|B_1 - \lambda I_{n-1}|$ είναι $k-1$. Ο πίνακας $B_1 - \lambda_1 I_{n-1}$ λοιπόν έχει βαθμίδα το πολύ $n-2$. Το ίδιο θα ισχύει και για τον $A_1 - \lambda_1 I_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 - \lambda_1 I_{n-1} \end{pmatrix}$. Τελικά και ο $A - \lambda_1 I_n$ θα έχει την ίδια ιδιότητα γιατί είναι ορθογώνια όμοιος με τον προηγούμενο. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε ένα άλλο ιδιοδιάνυσμα u_2 της λ_1 το οποίο να είναι ορθογώνια όμοιο με το u_1 .

Αν το $k = 2$ σταματάμε, αν όχι συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Δηλαδή, βρίσκουμε μια ορθοκανονική βάση του R^n έστω την $\{u_1, u_2, v'_1, \dots, v'_{n-2}\}$ και ως ονομάσουμε Q τον πίνακα με στήλες αυτά τα στοιχεία.

$$Q = (u_1, u_2, v'_1, \dots, v'_{n-2})$$

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για τον πίνακα $A_2 = Q^t A Q$ μέχρι να βρούμε μια ορθοκανονική βάση διάστασης k για την λ_1 . ■

5.4 Υπολογισμός ιδιοτιμών με επανάληψη

Μια ιδιοτιμή λ ενός πίνακα A θα λέμε ότι κυριαρχεί πάνω στις άλλες, αν έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. Όπως θα δούμε πιο κάτω στις περισσότερες

εφαρμογές αυτή η ιδιοτιμή είναι η πιο ενδιαφέρουσα.

Π.χ. α) Έστω ότι ο A έχει ιδιοτιμές τις $-5, -2, 1, 3$, τότε η -5 είναι η κυριαρχούσα.

β) Έστω ότι ο A έχει ιδιοτιμές $-4, -2, 1, 4$, τότε καμία δεν κυριαρχεί.

Θεώρημα 30 Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και μια ιδιοτιμή λ_1 να κυριαρχεί. Έστω x_0 ένα τυχαίο διάνυσμα ώστε να έχει μια συντεταγμένη με κατεύθυνση το ιδιοδιάνυσμα της λ_1 και να υπάρχει το Ax_0 . Τότε η ακολουθία $x_k = A^k x_0$ συγκλίνει στο ιδιοδιάνυσμα της λ_1 .

Απόδειξη. Έστω οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ και τα ιδιοδιανύσματα u_1, \dots, u_n . Έστω $x_0 = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$ με $a_1 \neq 0$.
 $x_k = A^k(a_1 u_1 + \dots + a_n u_n) = a_1 A^k u_1 + \dots + a_n A^k u_n = a_1 \lambda_1^k u_1 + \dots + a_n \lambda_n^k u_n =$
 $= \lambda_1^k (a_1 u_1 + a_2 u_2 (\lambda_2^k / \lambda_1^k) \dots + a_n (\lambda_n^k / \lambda_1^k) u_n)$.
 Επειδή $|\lambda_i / \lambda_1| < 1 \implies (\lambda_i^k / \lambda_1^k) \rightarrow 0$, το x_k συγκλίνει στην κατεύθυνση του u_1 . ■

Σχόλιο Επειδή τα x_k αυξάνουν ώστε λόγω στρογγυλοποίησης το λάθος να μεγαλώνει, διαιρούμε το x_k με την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή των συντεταγμένων του. Το νέο διάνυσμα χρησιμοποιείται για την επόμενη επανάληψη.

Μια προσέγγιση της κυριαρχούσας ιδιοτιμής δίνεται από το πηλίκο του

$$\text{Rayleigh} : (x \cdot (Ax)^t) / (x \cdot x^t)$$

Αν το u είναι ιδιοδιάνυσμα τότε $(u \cdot (Au)^t) / (u \cdot u^t) = (u \cdot \lambda u^t) / (u \cdot u^t) = \lambda$. Το πηλίκο $(x_i \cdot (Ax_i)^t) / (x_i \cdot x_i^t)$ συγκλίνει στην ιδιοτιμή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Δίνεται ότι η κυριαρχούσα ιδιοτιμή υπάρχει και είναι 10. Επίσης δίνεται το ιδιοδιάνυσμα της ίσο με $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Θα εφαρμόσουμε την προηγούμενη μέθοδο και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα.

Έστω $x_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ μια τυχαία επιλογή.

Επανάληψη	Ax	x	$\frac{x \cdot Ax}{x \cdot x}$
1	$Ax_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$	$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.75 \\ 1 \end{pmatrix} = Ax_0/8$	5
2	$Ax_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5.75 \\ 3.5 \end{pmatrix}$	$x_2 = \begin{pmatrix} 0.869565 \\ 1 \\ 0.068696 \end{pmatrix} = Ax_1/5.75$	9.88889
3	$Ax_2 = \begin{pmatrix} 9.56522 \\ 9.69565 \\ 4.95652 \end{pmatrix}$	$x_3 = \begin{pmatrix} 0.986547 \\ 1 \\ 0.511211 \end{pmatrix}$	9.99888
4	$Ax_3 = \begin{pmatrix} 9.95516 \\ 9.96861 \\ 4.99552 \end{pmatrix}$	$x_4 = \begin{pmatrix} 0.998651 \\ 1 \\ 0.501125 \end{pmatrix}$	9.99999

Βλέπουμε ότι μετά από 4 επαναλήψεις, η μέθοδος δίνει μια καλή προσέγγιση της ιδιοτιμής.

Το επόμενο θεώρημα είναι μια εφαρμογή της προηγούμενης μεθόδου και η απόδειξή του αφήνεται σαν άσκηση:

Θεώρημα 31 Έστω A πραγματικός συμμετρικός πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ώστε $|\lambda_i| > |\lambda_{i+1}|$. Έστω u_1 ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα της λ_1 . Τότε

1) Ο πίνακας $B = A - \lambda_1 u_1 u_1^t$ έχει ιδιοτιμές τα $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Ο πίνακας B είναι συμμετρικός.

2) Αν u είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί σε κάποια ιδιοτιμή $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ τότε είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα και του A για την ίδια ιδιοτιμή.

Εδώ το u_1 είναι διάνυσμα στήλη.

Με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε όλες τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του A .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Έστω $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ και $x^{(0)} = (1, 7)$ αρχικό διάνυσμα.

Σύμφωνα με τη μέθοδο έχουμε $x^{(k)} = A^k x^{(0)}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A δίνεται από την ορίζουσα $\begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$. Άρα $\lambda_1 = 4$ και $u_1 = (1, 1)$, $\lambda_2 = 1$ και $u_2 = (1, -2)$. Τώρα θα εξετάσουμε το ρόλο της κυριαρχούσας ιδιοτιμής μετά από επαναλήψεις. Εκφράζουμε το $x^{(0)}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των ιδιοτιμών: $x^{(0)} = 3u_1 - 2u_2$. Μετά 20 επαναλήψεις έχουμε $A^{20}x^{(0)} = A^{20}(3u_1 - 2u_2) = 3(4^{20}u_1) - 2(1^{20}u_2) \approx 3(4^{20}u_1)$.

Θα βρούμε επίσης την κυριαρχούσα ιδιοτιμή με επανάληψη:

$$x^{(0)} = (1, 7), x^{(1)} = (10, 16), x^{(2)} = (46, 52), x^{(3)} = (190, 196), x^{(4)} = (766, 772), x^{(5)} = (3070, 3076)$$

$$(x^{(1)} \cdot x^{(0)} / x^{(0)} \cdot x^{(0)}) = 3.25, (x^{(2)} \cdot x^{(1)} / x^{(1)} \cdot x^{(1)}) = 3.77, (x^{(3)} \cdot x^{(2)} / x^{(2)} \cdot x^{(2)}) = 3.94, (x^{(4)} \cdot x^{(3)} / x^{(3)} \cdot x^{(3)}) = 3.98, (x^{(5)} \cdot x^{(4)} / x^{(4)} \cdot x^{(4)}) = 3.996.$$

5.5 ΝΟΡΜΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να υπενθυμίσει κάποια στοιχειώδη αποτελέσματα από τη συναρτησιακή ανάλυση τα οποία είναι απαραίτητα για τη μελέτη των πινάκων. Αναφέρουμε περισσότερες προτάσεις από όσες χρειαζόμαστε άμεσα για να τονίσουμε τη σχέση της γραμμικής άλγεβρας με τη συναρτησιακή ανάλυση.

Η νόρμα του πίνακα αποτελεί κύριο εργαλείο για την μελέτη του και ουσιαστικά καθορίζει ανοικτές περιοχές όπου βρίσκονται οι ιδιοτιμές του. Είναι η ίδια έννοια που χρησιμοποιούμε στη συναρτησιακή ανάλυση για τη μελέτη των γραμμικών τελεστών, αφού ως γνωστόν κάθε πίνακας ορίζει έναν ενδομορφισμό και αυτός είναι συμπαγής στον γραμμικό χώρο \mathbf{C}^n ή \mathbf{R}^n εφωδιασμένο με οποιαδήποτε νόρμα.

Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε πίνακα πάνω από τους μιγαδικούς υπάρχουν όλες οι ιδιοτιμές του. Οπότε η μελέτη των πινάκων πάνω από τους μιγαδικούς έχει περισσότερα πλεονεκτήματα.

Δύο πρωταρχικά ερωτήματα στη θεωρία πινάκων είναι τα ακόλουθα:

α) Πότε το γινόμενο ενός τετραγωνικού πίνακα A με ένα διάνυσμα x δίνεται σαν σημειακό γινόμενο $\cdot Ax = cx$. (Σύγκρινε με τις ιδιοτιμές.)

Αν ο A ήταν πολλαπλάσιο του ταυτοτικού, προφανώς θα ίσχυε και οι πράξεις σ' αυτή την περίπτωση θα ήταν απλές.

β) Τι επίδραση έχει ο πίνακας A στο 'μέγεθος', $\|x\|$, του x : $\|Ax\|$;

Έστω το σώμα $\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}$. Ως γνωστόν όταν ορίζεται ένα μήκος σε έναν πεπερασμένης διάστασης διανυσματικό χώρο \mathbf{K}^n αυτός αποκτά τοπολογικές ιδιότητες και γίνεται πλήρης μετρικός χώρος.

Για $x \in \mathbf{K}^n$ το μέγεθος του x είναι ως επί το πλείστον η Ευκλείδεια ή Ερμιτιανή νόρμα του: $|x|_2 = \sqrt{|x|_1^2 + \dots + |x|_n^2}$. Ο \mathbf{K}^n με αυτή τη νόρμα είναι ο χώρος Banach $l^2(n)$.

Υπενθυμίζουμε ότι χώρος Banach X είναι ένας γραμμικός χώρος με νόρμα ο οποίος είναι πλήρης με την επαγόμενη μετρική. Νόρμα είναι μια απεικόνιση $\| - \|$ από τον X στους πραγματικούς ώστε να ισχύουν οι ακόλου-

θες ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \|u\| &\geq 0, \|u\| = 0 \Rightarrow u = \bar{0} \\ \|cu\| &= |c|\|u\| \\ \|u\| + \|v\| &\geq \|u + v\| \end{aligned}$$

Εκτός από την l^2 νόρμα υπάρχουν και άλλες πιο εύκολες στους υπολογισμούς αλλά παρέχουν λιγότερες πληροφορίες.

Νόρμα αθροίσματος $|x|_1 = \sum_i |x_i|$. Ο \mathbf{K}^n με αυτή τη νόρμα είναι ο χώρος Banach $l^1(n)$.

Νόρμα μεγίστου $|x|_\infty = \max\{|x_i| \mid n \geq i \geq 1\}$. Ο \mathbf{K}^n με αυτή τη νόρμα είναι ο χώρος Banach $l^\infty(n)$.

Ορισμός 32 Δύο νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ σε έναν διανυσματικό χώρο X καλούνται ισοδύναμες αν υπάρχουν θετικοί αριθμοί δ_1 και δ_2 , ώστε

$$\delta_2 \geq \frac{\|u\|_1}{\|u\|_2} \geq \delta_1, \forall u \in X - \{\bar{0}\}.$$

Πρόταση 33 Οι προηγούμενες νόρμες είναι ισοδύναμες στον \mathbf{K}^n .

Έστω $L(\mathbf{K}^n)$ ο γραμμικός χώρος των ενδομορφισμών στον χώρο Banach \mathbf{K}^n . Με την πράξη της σύνθεσης ο προηγούμενος χώρος γίνεται άλγεβρα. Θα δούμε ότι αυτός ο χώρος εφωδιάζεται με νόρμα και αυτές οι νόρμες 'σχεδόν' σέβονται το γινόμενο. Οπότε ο $L(\mathbf{K}^n)$ γίνεται μια νορμαρισμένη άλγεβρα και μάλιστα άλγεβρα Banach.

Αν ορίσουμε μια συγκεκριμένη βάση στο \mathbf{K}^n , τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός μεταξύ $L(\mathbf{K}^n)$ και της n^2 -διάστατης άλγεβρας όλων των $n \times n$ πινάκων. Οπότε μπορούμε να ταυτίσουμε αυτούς τους δύο χώρους.

Ορισμός 34 Νόρμα ενός πίνακα A , $\|A\|$, είναι το μικρότερο φράγμα ώστε $\|A\||x| \geq |Ax|$ για κάθε $x \in \mathbf{K}^n$.

Λήμμα 35

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup\{|Ax|/|x| \mid x \in \mathbf{K}^n - \{\mathbf{0}\}\}. \\ \|A\| &= \inf\{q \mid q|x| \geq |Ax| \mid x \in \mathbf{K}^n\}. \end{aligned}$$

Προφανώς η νόρμα του πίνακα εξαρτάται από τη νόρμα του διανυσματικού χώρου που χρησιμοποιούμε.

Λήμμα 36 1) $\|A\|\|B\| \geq \|AB\|$.
2) $\|A\|^k |x| \geq |A^k x|$.

Η προηγούμενη σχέση εκφράζει την ιδιότητα που περιγράψαμε πιο πάνω, ότι η νόρμα σχεδόν σέβεται το γινόμενο.

Θεώρημα 37 ι) Έστω ο \mathbf{K}^n εφωδιασμένος με τη νόρμα l^1 του αθροίσματος. Τότε $\|A\| = \max\{|a_j^c|_1 \mid n \geq j \geq 1\}$. Εδώ a_j^c είναι η j στήλη του πίνακα.

ιι) Έστω ο \mathbf{K}^n εφωδιασμένος με τη νόρμα l^∞ του μεγίστου. Τότε $\|A\| = \max\{|a_j^r|_1 \mid n \geq j \geq 1\}$. Εδώ a_j^r είναι η j γραμμή του πίνακα.

ιιι) Έστω ο \mathbf{K}^n εφωδιασμένος με τη συνήθη l^2 νόρμα. Τότε $\sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}^2|} \geq \|A\|$.

Απόδειξη. ι) Έστω $x = (x_1, \dots, x_n)^t$. Τότε $Ax = x_1 a_1^c + \dots + x_n a_n^c$ και υποθέτουμε ότι $\|x\| = 1$ χωρίς βλάβη της γενικότητας. Θα βρούμε ένα x το οποίο μεγιστοποιεί την παράσταση $|Ax|_1$ με τη νόρμα του x να είναι ένα. Ας υποθέσουμε ότι η j στήλη του A έχει μέγιστο άθροισμα καταπόλυτο τιμή. Ουσιαστικά θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την παράσταση

$$\sum_i |x_1 a_{i1} + \dots + x_j a_{ij} + \dots + x_n a_{in}|$$

όταν $|x_1| + \dots + |x_n| = 1$. Επιλέγοντας κατάλληλα τα πρόσημα των x_i μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_t \geq 0$ και $a_{it} \geq 0$ για $n \geq t \geq 1$. Τότε η παράσταση θα μεγιστοποιείται όταν $x_j = 1$ και γίνεται a_{ij} . Άρα το x που μεγιστοποιεί την παράσταση είναι το διάνυσμα $(0, \dots, 0, 1, 0 \dots 0)$ και

$$|Ax|_1 = |a_j^c|_1$$

Το ιι) είναι ανάλογο και το ιιι) αφήνεται σαν άσκηση. ■

Με τη βοήθεια της προηγούμενης πρότασης μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι προηγούμενες σχέσεις πληρούν την ιδιότητα της νόρμας, οπότε μπορούμε να ορίσουμε νόρμες πινάκων στο χώρο των πινάκων ως εξής:

$$\|A\|_1 := \max\{|a_j^c|_1 \mid n \geq j \geq 1\}, \|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}^2|},$$

$$\|A\|_\infty := \max\{|a_j^r|_1 \mid n \geq j \geq 1\}$$

Προφανώς ισχύει ότι $\|A\|_t \|x\|_t \geq \|Ax\|_t \quad t = 1, 2, \infty \quad x \in \mathbf{K}^n$.

Πρόταση 38 Αν $\|A\|$ είναι η νόρμα του πίνακα A που προέρχεται από τον \mathbf{K}^n με την αντίστοιχη νόρμα και $\|A\|_t$ η νόρμα όπως ορίστηκε προηγουμένως, τότε ισχύει ότι $\|A\|_t \geq \|A\|$.

Θεώρημα 39 Έστω ότι ο πραγματικός πίνακας A διαγωνοποιείται, λ_1 η μέγιστη κατ' απόλυτο τιμή ιδιοτιμή του A και u_1 ένα ιδιοδιάνυσμά της. Τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα x , η ακολουθία $A^n x$ συγκλίνει σε ένα πολλαπλάσιο του u_1 .

Απόδειξη. Έστω $A = PDP^{-1}$, τότε οι στήλες του P είναι τα ιδιοδιάνυσματα του A . Έχουμε λοιπόν $A^k x = PD^k P^{-1} x = PD^k y = y_1 \lambda_1^k u_1 + \dots + y_n \lambda_n^k u_n = \lambda_1^k [y_1 u_1 + \dots + y_n (\lambda_n^k / \lambda_1^k)] u_n \approx \lambda_1^k y_1 u_1$. Εδώ $y = P^{-1} x$ και

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \blacksquare$$

Σημείωση $\|A\| \|u\| \geq |Au| \Rightarrow \|A\| \|u\| \geq |\lambda| \|u\| \Rightarrow \|A\| \geq |\lambda|$. Δηλαδή το $|\lambda|$ φράσσεται από την $\|A\|$ και η κυριαρχούσα ιδιοτιμή παρέχει μία σχετική προσέγγιση της νόρμας του πίνακα.

Το επόμενο θεώρημα έχει εφαρμογή σ' αυτή την κατηγορία πινάκων για τον προσδιορισμό της κυριαρχούσας ιδιοτιμής. Θα το εφαρμόσουμε στα οικονομικά μοντέλα.

Ορισμός 40 1) Έστω $x = (x_1, \dots, x_n)$ και $y = (y_1, \dots, y_n)$. Θα λέμε ότι $x \geq y$ αν $x_i \geq y_i$ και $x > y$ αν $x_i > y_i$ για $n \geq i \geq 1$.

2) Ένας πίνακας $A = (a_{ij})$ θα λέγεται θετικός αν $a_{ij} > 0$ ή μη-αρνητικός αν $a_{ij} \geq 0$ για $n \geq i, j \geq 1$.

Θα δώσουμε μια σύντομη απόδειξη του περίφημου θεωρήματος Peron-Frobenius υποθέτοντας ότι ο εν λόγω πίνακας έχει κυριαρχούσα ιδιοτιμή. Υπάρχουν διάφορες αποδείξεις αυτού του θεωρήματος αλγεβρικές ή τοπολογικές με χρήση σταθερών σημείων.

Θεώρημα 41 (Peron-Frobenius) Έστω A πίνακας με όλα τα στοιχεία του αυστηρά θετικά. Τότε η κυριαρχούσα ιδιοτιμή του είναι πραγματική θετική και το ιδιοδιάνυσμά της έχει θετικές συνιστώσες.

Απόδειξη. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο A έχει ιδιοτιμές. Έστω $\Omega_x = \{t \mid t \in \mathbf{R}^+, Ax \geq tx \text{ όπου } x \geq \mathbf{0} \text{ για κάποιο θετικό μη-μηδενικό διάνυσμα } x\}$. Προφανώς $\Omega_x \neq \emptyset$ γιατί ο A είναι θετικός και αν $u - v \geq \mathbf{0}$ τότε $A(u - v) > \mathbf{0}$. Επίσης το Ω_x είναι φραγμένο (χρησιμοποιώντας τη νόρμα του μεγίστου δείχνουμε ότι για κάθε t από το Ω_x ισχύει ότι $\|A\| \geq t$). Έστω $t_x = \max \Omega_x$ και $t_0 = \sup \{t_x\}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $x > \mathbf{0}$ ώστε $Ax = t_0 x$. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει, τότε $\forall y > \mathbf{0} \Rightarrow Ay \geq t_0 y$. Τότε $A^2 y > t_0 Ay$ (γιατί ο A είναι θετικός) και αυτό σημαίνει ότι ο t_0 δεν είναι το μέγιστο γιατί για $x = Ay$ έχουμε $Ax > t_0 x \Rightarrow t_x > t_0$. Άτοπο. Άρα $\exists y > \mathbf{0}$ με

$Ay = t_0y$. Έστω τώρα μία άλλη ιδιοτιμή λ . $Ax = \lambda x \Rightarrow A|x| \geq |\lambda||x| = |Ax|$
 Εδώ το $|x|$ σημαίνει ότι παίρνουμε απόλυτες τιμές στις συντεταγμένες του x .
 Άρα $t_0 \geq |\lambda|$. ■

Μία άμεση εφαρμογή των προηγουμένων είναι στη θεωρία γράφων.

5.6 Ιδιοτιμές σε δίκτυα

Έστω Γ ένας γράφος n -κορυφών για τον οποίο ισχύει ότι αν υπάρχει σύνδεση από την i στην j κορυφή, τότε υπάρχει και από την j στην i . Δηλαδή ο πίνακας M του Γ είναι συμμετρικός. Θέλουμε να μελετήσουμε τρόπους οι οποίοι να μας περιγράφουν την προσπέλαση της κάθε κορυφής (δηλαδή η συγκεκριμένη κορυφή πόσο ικανοποιητικά συνδέεται με άλλες κορυφές). Ένας δείκτης που περιγράφει αυτό το μέγεθος δίνεται από το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην κυριαρχούσα ιδιοτιμή του πίνακα.

Επειδή ο M είναι πραγματικός συμμετρικός θα έχει n ορθογώνια ιδιοδιανύσματα. Επίσης ισχύει ότι για τους συγκεκριμένους γράφους υπάρχει η κυριαρχούσα ιδιοτιμή από το θεώρημα Perron-Frobenius. Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε αυτή την ιδιοτιμή και το ιδιοδιάνυσμά της (συνήθως με επαναληπτική μέθοδο). Ας υποθέσουμε ότι ο M περιγράφει δρόμους μεταξύ πόλεων. Ο M^k δίνει όλες τις συνδέσεις με $k - 1$ ενδιάμεσους δρόμους. Το άθροισμα των στοιχείων της i γραμμής δίνει τον αριθμό των συνδέσεων με $k - 1$ σταθμούς που φεύγουν από την πόλη i . Έστω $\mathbf{1}$ ο πίνακας στήλη με μονάδες. Το προηγούμενο άθροισμα δίνεται από την i θέση του διανύσματος $M^k \mathbf{1}$.

Ας χρησιμοποιήσουμε το $\mathbf{1}$ σαν αρχικό διάνυσμα για να προσεγγίσουμε το ιδιοδιάνυσμα της κυριαρχούσας ιδιοτιμής του M . Αυτό το ιδιοδιάνυσμα θα δίνεται από το $M^k \mathbf{1}$ καθώς το k μεγαλώνει αρκετά. Επίσης το $M^k \mathbf{1}$ θα δίνει συνδέσεις με περισσότερες και περισσότερες ενδιάμεσες διασυνδέσεις από κάθε πόλη καθώς το k μεγαλώνει. Οπότε η αναλογία των συντεταγμένων του ιδιοδιανύσματος αυτού θα δίνει την προσπελασιμότητα των πόλεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

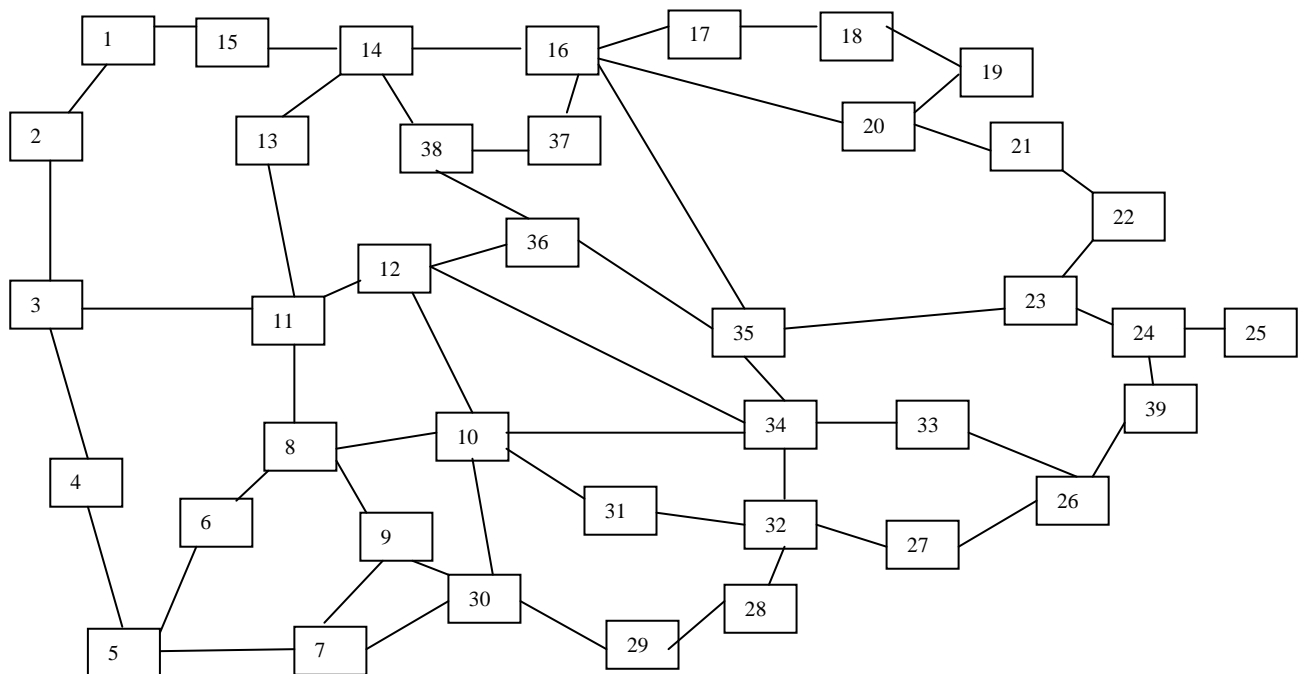
$$\begin{array}{ccc}
 & 3 & \\
 & | & \searrow \\
 1 & - & 2 \\
 & | & \swarrow \\
 & 4 &
 \end{array}
 \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$u_n = M^n(1, 1, 1, 1)^t$. Με επαναληπτική μέθοδο βρίσκουμε ότι η κυριαρχούσα ιδιοτιμή είναι $\lambda = 2.17$ και το ιδιοδιάνυσμα $(0.44, 1, 0.84, 0.84)$.

Επειδή $1 > 0,84 > 0,44$. Η δεύτερη πόλη έχει τις καλύτερες συνδέσεις από τις άλλες όπως φαίνεται και στο σχήμα. Η πρώτη τις χειρότερες και η τρίτη και τέταρτη τις ίδιες.

ΣΧΟΛΙΟ Σημειώνουμε εδώ μία εφαρμογή της προηγούμενης μεθόδου στον κλάδο της ιστορικής γεωγραφίας. Τον δωδέκατο αιώνα, υπήρχαν 39 μεγάλες πόλεις στην κεντρική Ρωσία οι οποίες συνδέοντο με κανάλια όπως δείχνει το σχήμα. Υπήρχε η εικασία ότι η Μόσχα ήταν πρωτεύουσα επειδή είχε την καλύτερη σύνδεση. Με την προηγούμενη μέθοδο αποδείχθηκε ότι το Κοζελσκ είχε αυτή την ιδιότητα και η Μόσχα ήταν έκτη στη σειρά. Άρα η Μόσχα δεν ήταν πρωτεύουσα γι' αυτόν τον λόγο.

Σχήμα 5.1:



Πόλεις	Νο	Προσπελασιμότητα
kozelsk	10	0.0837
Kolomna	34	0.0788
Vyazma	12	0.0722
Bryansk	8	0.0547
Mtsensk	30	0.0493
Moscow	35	0.0490
Dorogobusch	11	0.0477

5.7 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Βρείτε πόσες πράξεις χρειάζεται η μέθοδος απαλειφής Gauss για την επίλυση ενός συστήματος n εξισώσεων με n αγνώστους και η μέθοδος G-S για μια επανάληψη. Συγκρίνετε τις δυο μεθόδους. Ποία μέθοδος είναι καλύτερη σε σχέση με την στρογκύλευση σφάλματος;

2) Εφαρμόστε τη μέθοδο G-S στα επόμενα συστήματα:

$$\begin{array}{ll} 5x - y + 2z = 40 & 5x + 4y - z = 8 \\ 2x + 4y - z = 10 & x - y + z = 4 \\ -2x + 2y + 10z = 8 & 2x + y + 2z = 1 \\ x_0 = 20, y_0 = 20, z_0 = -40 & x_0 = y_0 = z_0 = 0 \end{array}$$

3) Αποδείξτε το θεώρημα της κυριαρχούσας ιδιοτιμής στους πραγματικούς συμμετρικούς πίνακες.

4) Έστω ότι ένας πίνακας A είναι μη-αρνητικός και το άθροισμα κάθε στήλης του είναι ένα. Δείξτε ότι κάθε δύναμη του πίνακα A έχει την ίδια ιδιότητα.

5) Δείξτε ότι ι) $\|A\| = \max\{\|Ax\|/\|x\| \mid x \in \mathbf{R}^n, \|x\| = 1\}$ και ιι) το λήμμα 36.

6) Αποδείξτε το Θεώρημα των Peron-Frobenius πλήρως.

7) Αποδείξτε την πρόταση 33.

8) Μια εταιρεία επεξεργασίας πετρελαίου έχει τρεις μονάδες. Κάθε μια παράγει τρεις κατηγορίες προϊόντων διαφορετικής ποιότητας: πετρέλαιο θερμάνσεως - πετρέλαιο κινήσεως - βενζίνη. Απο ένα βαρέλι πετρελαίου η κάθε μονάδα παράγει αριθμό γαλλονιών προϊόντων όπως εκφράζεται στον ακόλουθο πίνακα:

	μονάδα 1	μονάδα 2	μονάδα 3
πετρέλαιο θερμάνσεως	20	4	4
πετρέλαιο κινήσεως	10	14	5
βενζίνη	5	5	12

Υποθέτουμε ότι η ζήτηση είναι 500 βαρέλια πετρελαίου θερμάνσεως, 850 πετρελαίου κινήσεως, και 1000 βενζίνης. Βρείτε τον αριθμό των βαρελιών που χρειάζεται η κάθε μονάδα με επαναληπτική μέθοδο.

9) Βρείτε την κυρίαρχουσα ιδιοτιμή και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του ακόλουθου πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

10) Βρείτε με επαναληπτική μέθοδο τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα των ακόλουθων πινάκων: $\begin{pmatrix} \frac{29}{72} & 0 & -\frac{5}{72} & \frac{1}{18} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{72} & 0 & \frac{29}{72} & -\frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & 0 & -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, και

$$\begin{pmatrix} 1.3159 & .12831 & .01836 & .18141 & .12269 & 0.033333 \\ .12831 & 1.1875 & .35912 & 0.039226 & 0.052468 & 0.033333 \\ .01836 & .35912 & 1.1875 & .10744 & 0.094199 & 0.033333 \\ .18141 & 0.039226 & .10744 & 1.2085 & .23012 & 0.033333 \\ .12269 & 0.052468 & 0.094199 & .23012 & 1.2672 & 0.033333 \\ 0.033333 & 0.033333 & 0.033333 & 0.033333 & 0.033333 & 1.6333 \end{pmatrix}$$

Κεφάλαιο 6

Μ Ο Ν Τ Ε Λ Α Μ Α Ρ Κ Ο Β

Πολλά από τα φυσικά φαινόμενα που μελετάμε παρότι είναι συνεχή (με την μαθηματική έννοια), προτιμούμε να θεωρούμε ότι παίρνουν διακριτές τιμές και αυτό διότι είναι ευκολότεροι οι υπολογισμοί χωρίς να χάνεται η ουσία του θέματος. Π.χ. όταν μιλάμε για τον καιρό συνήθως λέμε ότι είναι αίθριος ή βροχερός ή νεφελώδης, ενώ όπως είναι φυσικό υπάρχουν και όλες οι ενδιάμεσες καταστάσεις. Επίσης και ο χρόνος σ' αυτή την περίπτωση θεωρείται διακριτός: χθες, σήμερα, αύριο.

Άλλο ανάλογο παράδειγμα το οποίο έχει εφαρμογές κυρίως στην ιατρική και κοινωνιολογία είναι η ψυχική διάθεση του ανθρώπου: λυπημένος, αδιάφορος, χαρούμενος.

Θεωρούμε λοιπόν ότι το σύστημα που μελετάμε στον διακριτό χρόνο λαμβάνει συγκεκριμένες τιμές από ένα πεπερασμένο σύνολο. Η παραχώρηση αυτή που κάνουμε για να κατασκευάσουμε το μοντέλο είναι σημαντική για τους υπολογισμούς και τελικά δεν αλλοιώνει την πληροφορία. Φανταστείτε πόσο πολύπλοκο θα ήταν το μοντέλο του καιρού αν το θεωρούσαμε συνεχές ως προς χρόνο και καταστάσεις. (Τότε θα χρειάζονταν πλήθος πολύπλοκων διαφορικών εξισώσεων. Για να τονίσουμε την πολυπλοκότητα απλά σημειώνουμε ότι από αυτό το πρόβλημα γεννήθηκε η θεωρία του χάους.)

Το ερώτημα λοιπόν που τίθεται τώρα είναι πώς θα εξελιχθούν αυτά τα μοντέλα στο χρόνο. Φυσικά θα πρέπει να καλύπτεται κάθε δυνατή περίπτωση και να εφαρμόζεται σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Το να περιμένουμε να προβλέψουμε τι θα γίνει μετά από πολλές δοκιμές θα ήταν άστοχο. Θα είμαστε πιο κοντά στην πραγματικότητα, αν απαντήσουμε με πιθανότητες. Χρειαζόμαστε λοιπόν την πιθανότητα $p_{j,i}$ μετάβασης του συστήματος από την i κατάσταση στην j . Επίσης η κατάσταση που θα βρίσκεται το σύστημα θα εκφράζεται πάλι με πιθανότητες.

Αν η $p_{j,i}$ εξαρτάται μόνο από την τωρινή κατάσταση του συστήματος, το σύστημα θα καλείται ανέλιξη **Markov**. Αν εξαρτάται γενικά από τις προ-

ηγούμενες θα καλείται στοχαστική ανέλιξη.

Ορισμός 42 Η πιθανότητα μετάβασης $p_{j,i}$ είναι η πιθανότητα μετάβασης του συστήματος από την i κατάσταση στην j κατά την επόμενη παρατήρηση.

Παράδειγμα 43 Αν η κατάσταση 2 αντιστοιχεί σε βροχερή ημέρα στα Ιωάννινα και η 3 σε συννεφιά, $p_{3,2}$ είναι η πιθανότητα του καιρού από βροχή σε συννεφιά σε δυο συνεχόμενες ημέρες.

Προφανώς $p_{j,i}$ είναι μεταξύ 0 και 1, και ισχύει

$$p_{1,i} + p_{2,i} + \dots + p_{n,i} = 1$$

Ορισμός 44 Καλούμε πίνακα μετάβασης P τον τετραγωνικό πίνακα $P = (p_{j,i})$ με μη-αρνητικά στοιχεία ώστε το άθροισμα των στοιχείων της κάθε στήλης του να είναι 1.

Θα μελετήσουμε λοιπόν το πρόβλημα της εξέλιξης ενός συστήματος που περιγράφεται από μια διαδικασία Markov.

Ορισμός 45 Ένα διάνυσμα πιθανότητας είναι ένα διάνυσμα στήλη (ή γραμμή ανάλογα) με μη-αρνητικές συντεταγμένες που έχουν άθροισμα 1.

Ορισμός 46 Τα διανύσματα πιθανότητας $x^{(n)}$ ($n = 0, 1, \dots$) λέγονται διανύσματα κατάστασης μιας διαδικασίας Markov, αν η i -συντεταγμένη $x_i^{(n)}$ είναι η πιθανότητα ώστε το σύστημα να είναι στην i κατάσταση κατά την n -παρατήρηση.

Με $x^{(0)}$ συμβολίζουμε την αρχική κατάσταση.

Παράδειγμα 47 Έστω ότι ο πίνακας μετάβασης P ενός μοντέλου καιρού δίνεται από:

$$\text{Αυριο} \begin{pmatrix} \text{Σημερα} \\ 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Το στοιχείο $(2, 1)$ του P μας δίνει την πιθανότητα μετάβασης από αίθριο 1 σε νεφελώδη 2 σε μια ημέρα. Ας βρούμε την ίδια μετάβαση αλλιά σε δυο ημέρες. Οπότε έχουμε τις εξής πιθανές μεταβάσεις: $1 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ ή $1 \rightarrow 2 \rightarrow 2$. Η κάθε περίπτωση έχει πιθανότητα αντίστοιχα $3/16$ και $1/8$. Η κατάσταση $(2, 1)$ σε δυο ημέρες θα πρέπει να λάβει υπόψη της και τις δυο περιπτώσεις και άρα θα είναι $3/16 + 1/8 = 5/16$. Αλλιά αυτό είναι το στοιχείο $(2, 1)$ του P^2 .

Θεώρημα 48 Αν ο P είναι ο πίνακας μετάβασης μιας διαδικασίας και $x^{(n)}$ το διάνυσμα κατάστασης στη n -στη παρατήρηση, τότε $x^{(n+1)} = Px^{(n)}$.

Απόδειξη. Η πιθανότητα να βρίσκεται το σύστημα στην i κατάσταση κατά την $n + 1$ παρατήρηση εξαρτάται από ποια κατάσταση βρισκόταν το σύστημα προηγουμένως. Αν αυτή ήταν η j , η πιθανότητα θα ήταν $p_{i,j}$. Αλλά και εκεί θα βρίσκεται με πιθανότητα $x_j^{(n)}$. Άρα η πιθανότητα γίνεται $p_{i,j}x_j^{(n)}$. Όπου και να βρισκόταν λοιπόν, η πιθανότητα θα είναι $x_i^{(n+1)} = \sum_j p_{i,j}x_j^{(n)}$. ■

Παράδειγμα 49 Μια εταιρεία ενοικιάσεως αυτοκινήτων έχει τρία γραφεία στην Αθήνα, Θεσ/κη και Πάτρα, (1, 2 και 3). Ένα αυτοκίνητο μπορεί να ενοικιασθεί από οποιοδήποτε γραφείο και να επιστραφεί σε οποιοδήποτε. Με έρευνα βρίσκουν ότι τα αυτοκίνητα επιστρέφονται σύμφωνα με τις ακόλουθες πιθανότητες.

	Γραφείο	1	2	3
Επιστροφή	1	0.8	0.3	0.2
	2	0.1	0.2	0.5
	3	0.1	0.5	0.3

Θεωρούμε το προηγούμενο πρόβλημα σαν μια ανάλυση Markov και ο προηγούμενος είναι ένας πίνακας μετάβασης. Οι συντεταγμένες ενός διανύσματος κατάστασης είναι οι πιθανότητες επιστροφής ενός αυτοκινήτου στα συγκεκριμένα γραφεία. Έστω ότι ένα αυτοκίνητο νοικιάζεται αρχικά από το γραφείο 2. Βρίσκουμε τα διανύσματα κατάστασης μέχρι και 11 ενοικιάσεις.

$x^{(n)}/n$	0	1	2	5	6	7	8	11
$x_1^{(n)}$	0	0.3	0.4	0.528	0.540	0.546	0.549	0.553
$x_2^{(n)}$	1	0.2	0.32	0.225	0.220	0.218	0.216	0.215
$x_3^{(n)}$	0	0.5	0.28	0.246	0.240	0.236	0.234	0.232

Τα διανύσματα κατάστασης για περισσότερες από 11 ενοικιάσεις είναι σχεδόν ίσα με το $x^{(11)}$.

Εδώ θα πρέπει να κάνουμε ορισμένες παρατηρήσεις.

α) Ο χρόνος ενοικίασης δεν παίζει ρόλο στο μοντέλο. Και αυτό είναι απαίτηση, διότι στην πραγματικότητα τα αυτοκίνητα δεν επιστρέφονται στον ίδιο χρόνο.

β) Η πληροφορία που δίνουν τα διανύσματα κατάστασης είναι ότι αν ένα αυτοκίνητο νοικιασθεί από το 2 γραφείο μετά από πολλές ενοικιάσεις θα έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να βρίσκεται στο 1.

Επίσης θα πρέπει να υπάρχουν περισσότερες θέσεις διαθέσιμες για στάθμευση στο πρώτο από ότι στα άλλα δυο. Αυτή η απαίτηση είναι σημαντική

για γραφεία τα οποία βρίσκονται σε περιοχές όπου οι χώροι στάθμευσης κοστίζουν ακριβά (αεροδρόμια, κέντρα μεγάλων πόλεων κλπ).

γ) Οι πληροφορίες που αποκομίσαμε απορρέουν από ένα συγκεκριμένο διάνυσμα κατάστασης, το $(0, 1, 0)$. Εύλογα θα ρωτούσαμε: Αν αυτό αλλάξει μήπως αλλάζουν και οι πληροφορίες μας; Στο ερώτημα αυτό θα μας απαντήσει το επόμενο θεώρημα. Η επόμενη πρόταση είναι απαραίτητη για την απόδειξη του θεωρήματος.

Πρόταση 50 Έστω P πίνακας μετάβασης με θετικά στοιχεία και έστω ρ το μικρότερο από αυτά. Αν ν είναι ένα διάνυσμα που έχει μέγιστη συντεταγμένη μ_0 και ελάχιστη ε_0 και μ_1 και ε_1 είναι αντίστοιχα για το διάνυσμα νP , τότε ισχύει ότι $\mu_0 \geq \mu_1$, $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_0$, και $(1 - 2\rho)(\mu_0 - \varepsilon_0) \geq \mu_1 - \varepsilon_1$.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε την διάταξη μεταξύ των διανυσμάτων: $\nu \geq \nu$ αν $\nu_i \geq v_i$ για κάθε i . Έστω ν' το διάνυσμα που έχει όλες τις συντεταγμένες του ίσες με μ_0 εκτός εκείνης του ν που είναι ίση με την ελάχιστη του ν . Δηλαδή, αν $\nu = (\nu_t)$ και $\nu' = (\nu'_t)$ με $\nu_k = \varepsilon_0 = \nu'_k$, $\nu'_t = \mu_0$ για $t \neq k$. Άρα $\nu' \geq \nu$. Οι συντεταγμένες $(\nu'P)_t$ του $\nu'P$ είναι της μορφής

$$\sum_{i=1}^n \nu'_i P_{it} = P_{kt}\varepsilon_0 + (1 - P_{kt})\mu_0 = \mu_0 - P_{tk}(\mu_0 - \varepsilon_0)$$

και $P_{kt} \geq \rho$. Άρα κάθε συντεταγμένη του $\nu'P$ είναι μικρότερη από $\mu_0 - \rho(\mu_0 - \varepsilon_0)$. Επειδή $\nu'P \geq \nu P$, έχουμε ότι

$$\max\{\nu_t | k \geq t \geq 1\} = \mu_0 \geq \mu_0 - \rho(\mu_0 - \varepsilon_0) \geq \mu_1 = \max\{(\nu P)_t | k \geq t \geq 1\}$$

Εφαρμόζουμε το ίδιο για το διάνυσμα $-\nu$. Οπότε

$$-\varepsilon_0 \geq -\varepsilon_0 - \rho(\mu_0 - \varepsilon_0) \geq -\varepsilon_1$$

Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις έχουμε το ζητούμενο.

■

ΕΡΩΤΗΜΑ. Είναι αληθές ότι οποιοδήποτε τυχαίο αρχικό διάνυσμα κατάστασης προσεγγίζει ένα σταθερό διάνυσμα σε μια διαδικασία Markov.

Παράδειγμα 51 Έστω $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $\nu^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Τότε $P^2 = I$ και $P^3 = P$. Άρα $\nu^{2k} = \nu$ και $\nu^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Οπότε η απάντηση στο προηγούμενο είναι όχι.

Ορισμός 52 α) Ένας πίνακας μετάβασης καλείται απλά κανονικός αν κάποια δύναμη του έχει όλα τα στοιχεία του θετικά.

β) Ένας πίνακας μετάβασης καλείται κανονικός αν έχει όλα τα στοιχεία του θετικά.

Θεώρημα 53 Αν ο P είναι απλά κανονικός πίνακας μετάβασης τότε ισχύει ότι:

- α) P^k συγκλίνει σε έναν πίνακα A .
- β) Κάθε στήλη του A είναι το ίδιο διάνυσμα πιθανότητας π .
- γ) Οι συντεταγμένες του π είναι θετικές.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο P δεν έχει μηδενικά στοιχεία και ρ είναι η μικρότερη τιμή τους. Έστω e_j το διάνυσμα με 1 στην j -θέση και 0 στις άλλες. Έστω μ_k και ε_k το μέγιστο και ελάχιστο αντίστοιχα του $e_j P^k$. Επειδή $e_j P^k = e_j P^{k-1} P$, από την προηγούμενη πρόταση θα έχουμε ότι

$$\mu_0 = 1 \geq \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \quad \text{και} \quad \dots \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_1 \geq 0 = \varepsilon_0.$$

Επίσης ισχύει ότι

$$(1 - 2\rho)^k = (\mu_0 - \varepsilon_0)(1 - 2\rho)^k \geq (\mu_{k-1} - \varepsilon_{k-1})(1 - 2\rho) \geq \mu_k - \varepsilon_k.$$

Άρα η ποσότητα $\mu_k - \varepsilon_k$ συγκλίνει στο 0 και το $e_j P^k$ συγκλίνει σε ένα διάνυσμα του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα. Έστω ότι αυτή η τιμή είναι η v_j . Ισχύει ότι $1 > \mu_k \geq v_j \geq \varepsilon_k > 0$ (οι ακραίες ανισότητες είναι καθαρές ανισότητες λόγω του ότι ο πίνακας είναι θετικός). Αλλά το $e_j P^k$ είναι η j -γραμμή του P^k και ο P^k συγκλίνει στον πίνακα με τις ζητούμενες ιδιότητες. Έστω τώρα ότι ο P είναι απλά κανονικός. Τότε κάποια δύναμη του θα έχει θετικά στοιχεία και η πρόταση ισχύει. ■

Πόρισμα 54 Αν ο P είναι ένας κανονικός πίνακας μετάβασης και A το όριο του με $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)^t$ ώστε $A = \pi(1, \dots, 1)$ τότε ισχύει ότι

- 1) για κάθε διάνυσμα πιθανότητας e το $P^k e$ συγκλίνει στο π^t ,
- 2) Το π είναι μοναδικό με την ιδιότητα $P\pi = \pi$. Δηλαδή ο πίνακας P έχει τη μονάδα σαν μια από τις ιδιοτιμές του.

Απόδειξη. 1) Ισχύει ότι $P^k e^t \rightarrow \pi(1, \dots, 1)e^t = \pi 1 = \pi$.

2) Έστω π' έτσι ώστε $P\pi' = \pi'$, τότε θα ισχύει $P^k \pi' \rightarrow \pi$. Άρα $\pi' = \pi$. ■

Ορισμός 55 Το διάνυσμα π όπως προηγουμένως καλείται κατάσταση ισορροπίας του συστήματος.

Παρατηρούμε ότι η κατάσταση ισορροπίας π του κανονικού πίνακα μετάβασης P είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1. Η νόρμα αυτών των πινάκων είναι 1 οπότε η ιδιοτιμή 1 είναι μέγιστη.

Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας P διαγωνοποιήται: $P = S\Lambda S^{-1}$. Τότε

$$x^{(k)} = P^k x^{(0)} = S\Lambda^k S^{-1}x^{(0)}.$$

Ας θέσουμε $c = S^{-1}x^{(0)}$ και να υπενθυμίσουμε ότι οι στήλες του S είναι τα ιδιοδιανύσματα του P . Άρα

(6.1)

$$x^{(k)} = S\Lambda^k c = (u_1^t, \dots, u_n^t) \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1 \lambda_1^k u_1^t + \dots + c_n \lambda_n^k u_n^t.$$

Η κατανομή λοιπόν αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των ιδιοδιανυσμάτων. Από τη σχέση $c = S^{-1}x^{(0)} \Leftrightarrow Sc = x^{(0)}$ έχουμε την αρχική κατανομή $x^{(0)}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των ιδιοδιανυσμάτων u_i :

$$x^{(0)} = c_1 u_1^t + \dots + c_n u_n^t = S(c_1, \dots, c_n)^t,$$

τότε

$$x^{(k)} = c_1 \lambda_1^k u_1^t + \dots + c_n \lambda_n^k u_n^t = S\Lambda^k S^{-1}S(c_1, \dots, c_n)^t.$$

Δηλαδή ο ρόλος των c_i είναι να ικανοποιούν την αρχική συνθήκη, (παρατηρήστε την αναλογία με τις αρχικές συνθήκες στις διαφορικές εξισώσεις).

Θα δούμε πιο κάτω στην ενότητα 7 ότι οι υπόλοιπες ιδιοτιμές αυτών των πινάκων πληρούν την ιδιότητα $1 \geq |\lambda_i|$ και μάλιστα $|\lambda_i| < 1$ για κανονικούς πίνακες μετάβασης.

Επειδή η κατανομή εξαρτάται από τις ιδιοτιμές 6.1, είναι προφανές ότι η ισορροπία του συστήματος ανάγεται στις εξής περιπτώσεις, όπως θα δούμε στην ενότητα 7:

Ευστάθεια, όταν $|\lambda_i| < 1$, $P^k \rightarrow 0$.

Ουδέτερη ευστάθεια, όταν $\lambda_1 = 1$ και $|\lambda_i| < 1$.

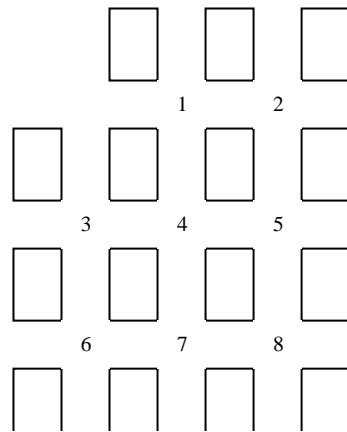
Αστάθεια, όταν υπάρχει i ώστε $|\lambda_i| > 1$, (ο P^k δεν συγκλίνει).

Ας επανέλθουμε πάλι στο παράδειγμα 49. Σύμφωνα με το θεώρημα κανονικών πινάκων μετάβασης, από οποιαδήποτε κατάσταση και να ξεκινήσουμε το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο. Άρα αν η εταιρεία διαθέτει 1000 αυτοκίνητα, θα πρέπει να υπάρχουν περίπου 558 θέσεις διαθέσιμες στο γραφείο 1, περίπου 230 στο 2 και περίπου 214 στο 3.

Και το επόμενο παράδειγμα στηρίζεται στην ίδια αρχή όπως το προηγούμενο.

Παράδειγμα 56 Ένας τροχονόμος τοποθετείται σε μια από τις 8 διασταυρώσεις όπως δείχνει το σχήμα.

Σχήμα 6.1: Τροχονόμος



Πρέπει να μένει σε κάθε διασταύρωση για μια ώρα και μετά να παραμείνει στην ίδια ή να προχωρήσει σε γειτονική. Για να μην είναι γνωστό που βρίσκεται, πρέπει να επιλέγει τυχαία μια διασταύρωση με την ίδια πιθανότητα για κάθε μια. Αν είναι στην 5, η επόμενη μπορεί να είναι 2, 4, 5, ή 8 με πιθανότητα $1/4$. Κάθε μέρα αρχίζει στην τοποθεσία που σταμάτησε την προηγούμενη.

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα σαν μια διαδικασία Markov. Ο επόμενος είναι ο πίνακας μετάβασης.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$1/3$	$1/3$	0	$1/5$	0	0	0	0
2	$1/3$	$1/3$	0	0	$1/4$	0	0	0
3	0	0	$1/3$	$1/5$	0	$1/3$	0	0
Νέα 4	$1/3$	0	$1/3$	$1/5$	$1/4$	0	$1/4$	0
5	0	$1/3$	0	$1/5$	$1/4$	0	0	$1/3$
6	0	0	$1/3$	0	0	$1/3$	$1/4$	0
7	0	0	0	$1/5$	0	$1/3$	$1/4$	$1/3$
8	0	0	0	0	$1/4$	0	$1/4$	$1/3$

Αν ο τροχονόμος ξεκινήσει από την 5, οι πιθανές του διασταυρώσεις, κάθε ώρα, δίνονται από το ακόλουθο διάνυσμα κατάστασης.

$\mathbf{x}^{(n)}/\mathbf{n}$	0	1	2	3	5	10	15	22
$\mathbf{x}_1^{(n)}$	0	0	0.133	0.116	0.123	0.113	0.109	0.107
$\mathbf{x}_2^{(n)}$	0	1/4	0.146	0.163	0.138	0.115	0.109	0.107
$\mathbf{x}_3^{(n)}$	0	0	0.05	0.039	0.073	0.1	0.106	0.107
$\mathbf{x}_4^{(n)}$	0	1/4	0.113	0.187	0.178	0.178	0.179	0.179
$\mathbf{x}_5^{(n)}$	1	1/4	0.279	0.19	0.168	0.149	0.144	0.143
$\mathbf{x}_6^{(n)}$	0	0	0	0.05	0.074	0.099	0.105	0.107
$\mathbf{x}_7^{(n)}$	0	0	0.133	0.104	0.125	0.138	0.141	0.143
$\mathbf{x}_8^{(n)}$	0	1/4	0.146	0.152	0.121	0.108	0.107	0.107

Για $n > 22$, όλα τα διανύσματα είναι περίπου ίσα με το $x^{(22)}$ μέχρι τρία δεκαδικά ψηφία. Δηλαδή τα διανύσματα κατάστασης πλησιάζουν ένα σταθερό διάνυσμα μετά από πολλές δοκιμές.

6.1 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Σε ένα μάθημα χωρισμένο σε δύο τμήματα παρατηρείται η εξής κινητικότητα των φοιτητών: Κάθε εβδομάδα το 1/4 του τμήματος Α και 1/3 του τμήματος Β εγκαταλείπουν το μάθημα και το 1/6 κάθε τμήματος πηγαίνει στο άλλο. Μπορούμε να κάνουμε πρόγνωση της παρακολούθησης των φοιτητών·

2) Μια έρευνα αγοράς για την αγορά νέων αυτοκινήτων έδειξε ότι ένα νέο αυτοκίνητο αγοράζεται κατά μέσο όρο μια φορά κάθε τρία χρόνια από κάποιον που έχει αυτοκίνητο. Αν χωρίσουμε τα αυτοκίνητα σε μικρά και μεγάλα, η έρευνα έδειξε ότι το 80% των μικρών αυτοκινήτων θα αντικατασταθούν από μικρά και το υπόλοιπο από μεγάλα. Έστω ότι υπάρχουν 40000 μικρά και 50000 μεγάλα, μπορούμε να προβλέψουμε τον αριθμό μετά από 12 χρόνια·

3) Κάποια χώρα αποτελείται από δυο εθνότητες Α και Β. Η Α αποτελεί πλειοψηφία και η Β μειοψηφία. Κατά τη διάρκεια κάποιας περιόδου παρατηρήθηκε η τάση αύξησης του ποσοστού της Α εν σχέση με την Β, η οποία οφείλεται σε γάμους, αλλαγή κουλτούρας και άλλους λόγους. Αρχικά η κατανομή ήταν $50 \cdot 10^6$ για την Α και $1/2 \cdot 10^6$ για την Β. Ο ακόλουθος πίνακας δίνει τις πιθανότητες μετάβασης από την μία στην άλλη:

	A	B
A	1	0.2
B	0	0.8

α) Αν υποθέσουμε ότι ο συνολικός πληθυσμός για κάθε γενιά είναι ο ίδιος, κάντε μια πρόγνωση για την κατανομή του πληθυσμού μετά n γενιές.

β) Κάντε το ίδιο αν υπάρχει ομοιόμορφη αύξηση 1% για κάθε γενιά.

γ) Υποθέτουμε ότι η A αυξάνει 2% από γενιά σε γενιά, ενώ η B μειώνεται κατά 3%. Περιγράψτε το μοντέλο και κάντε πρόγνωση της κατανομής για n γενιές.

4) Έστω ότι είναι αδύνατο να πλουτίσει κάποιος φτωχός (Φ) χωρίς να περάσει από την μικροαστική κατηγορία (M) και το ανάποδο. Κάθε χρόνο, τα $2/3$ των πλουσίων (Π) παραμένουν πλούσιοι ενώ το υπόλοιπο περιέρχεται στην δεύτερη κατηγορία. Από τη δεύτερη, το $1/3$ παραμένει και το υπόλοιπο μοιράζεται στις άλλες δύο. Από την πρώτη (Φ), τα $2/3$ παραμένουν και το υπόλοιπο μεταφέρεται στην επόμενη. Βρείτε την κατανομή μετά από n έτη. Αν αρχικά υπήρχαν μόνο 1000 φτωχοί, πως θα κατανεμηθούν μετά από 5 και 10 χρόνια.

5) Δημιουργήστε ένα δικό σας παράδειγμα με άμεσες εφαρμογές στη ζωή.

Κεφάλαιο 7

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΑΙΧΝΙΩΝ

Η θεωρία παιγνίων ασχολείται με τη μαθηματική μοντελοποίηση των τυχερών παιγνίων. Οι μαθηματικές βάσεις τέθηκαν από τους John vonNeumann και Oscar Morgenstern με την έκδοση του βιβλίου τους 'Θεωρία Παιγνίων και Οικονομικός Συσχετισμός'. Η επιρροή που είχε η εφαρμογή τους σε κοινωνικές επιστήμες ήταν πραγματικά σημαντική. Θεωρείται ότι ήταν τόσο σημαντική όσο του απειροστικού λογισμού στις φυσικές επιστήμες. Παρόλα αυτά, επειδή ο ανθρώπινος παράγων στα παίγνια και φυσικά η ψυχολογία του παίχτη είναι καθοριστική, η θεωρία δεν είχε τα αποτελέσματα που θα περιμέναμε. Επίσης θα πρέπει να πούμε ότι τα παραδείγματα που μελετούνται απέχουν πολύ από τα πραγματικά παίγνια. Οι λόγοι είναι προφανείς όπως θα δούμε πιο κάτω. Θα μπορούσαμε να παραλληλίσουμε την κατάσταση αυτή με τις πληροφορίες που δίνει η θεωρία πιθανοτήτων όταν εφαρμόζεται στην πράξη για μικρό σχετικά αριθμό δειγμάτων.

Λέγοντας παίγνιο θα εννοούμε ένα συγκεκριμένο σύνολο από παίχτες, κανόνες και έναν καθορισμένο τρόπο πληρωμής για κάθε αποτέλεσμα που θα προκύπτει από την εφαρμογή του παιγνίου από τους παίχτες. Ο όρος παιχνίδι θα δηλώνει συγκεκριμένη εφαρμογή του παιγνίου (παρτίδα).

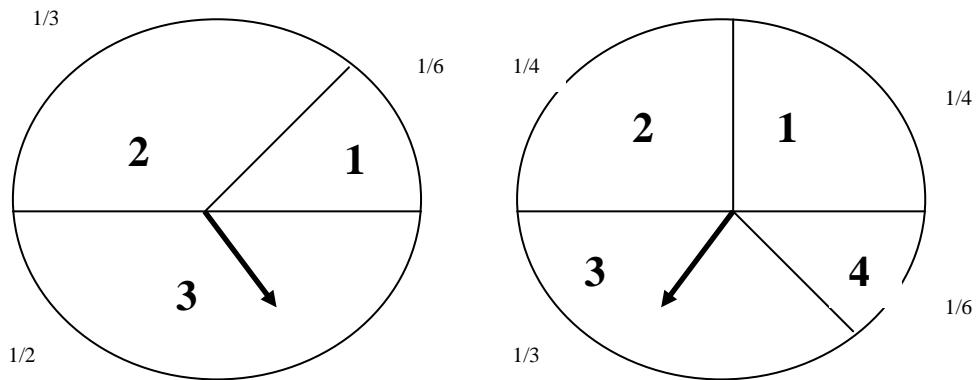
Ακόμη και παίγνια, όπως το τάβλι, που εξαρτώνται από το αποτέλεσμα μίας καθαρά τυχερής επινόησης, τα ζάρια, μπορούν να θεωρηθούν παίγνια σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό θεωρώντας ότι υπάρχει ένας ακόμη παίχτης που καλείται τύχη και οι κινήσεις του και τα αποτελέσματα τους να είναι καθορισμένα όπως και για τους υπόλοιπους παίχτες.

Προχωρούμε σε συγκεκριμένα παραδείγματα όπου θα κατασκευάσουμε το μαθηματικό μοντέλο και θα μελετήσουμε την εξέλιξη του. Θα μελετήσουμε μόνο παίγνια όπου συμμετέχουν μόνο δύο παίχτες και υποθέτουμε ότι οι συγκεκριμένοι τρόποι που θα παίζουν αυτοί (οι στρατηγικές τους) έχουν απαριθμηθεί. Σημειώνουμε ότι αυτό είναι πάντα δυνατόν στην θεωρία αλλά στην πράξη δεν εφαρμόζεται λόγω του μεγάλου αριθμού συνδυασμών

στρατηγικής.

Παράδειγμα 57 Το παίγνιο παίζεται από δύο παίκτες με την βοήθεια δύο ρουλετιών όπως στο σχήμα (μία για κάθε παίκτη) χωρισμένες σε ανισομερή εμβαδά.

Σχήμα 7.1:



Ο πρώτος παίκτης P έχει τρεις επιλογές, ενώ ο δεύτερος Γ έχει τέσσερες. Ανάλογα με την επιλογή κάθε παίκτη ο Γ πληρώνει τον P όπως δείχνει ο πίνακας.

$R \setminus G$	1	2	3	4
1	3	5	-2	-1
2	-2	4	-3	-4
3	6	-5	0	3

Δηλαδή η επιλογή (1,2) σημαίνει ότι ο Γ δίνει στον P 5. Ενώ η (2,4), ο P δίνει στον Γ 4. Κάθε κίνηση είναι τυχαία, οι παίκτες δεν έχουν επιλογή στρατηγικής. Σκοπός μας είναι να βρούμε πόσα θα κερδίσει ή θα χάσει ο κάθε παίκτης μετά από πολλές δοκιμές.

7.1 Παίγνιο δύο ατόμων με μηδενικό άθροισμα κέρδους-ζημιάς

Αυτό σημαίνει ότι παίζουν 2 παίκτες χωρίς να μπορούν να ελέγχουν το αποτέλεσμα της δοκιμής και όσα χάνει ο ένας τόσα κερδίζει ο άλλος.

7.1. ΠΑΙΓΝΙΟ ΔΥΟ ΑΤΟΜΩΝ ΜΕ ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΕΡΔΟΥ"-ΖΗΜΙΑΣ55

Επειδή κάθε παίχτης έχει πεπερασμένο αριθμό επιλογών τα αποτελέσματα μπορούν να παρασταθούν με ένα πίνακα, ο οποίος λέγεται **πίνακας παιγνίου**.

Έστω ότι ο P έχει m δυνατές επιλογές και ο Γ n . Έστω ότι a_{ij} είναι το ποσό που κερδίζει ο P όταν αυτός επιλέγει την κίνηση i και ο αντίπαλός του την j . Το a_{ij} δεν είναι ανάγκη να είναι χρήματα. Ο ακόλουθος πίνακας καλείται πίνακας παιγνίου

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Σημαντικό ρόλο παίζει η πιθανότητα με την οποία ο κάθε παίχτης θα επιλέξει την κίνησή του.

Π.χ. Η πιθανότητα που έχει ο κάθε παίχτης να επιτύχει την επιθυμητή δοκιμή στο προηγούμενο παράδειγμα εξαρτάται από το εμβαδόν του χωρίου. Δηλαδή:

Ο P έχει πιθανότητα $1/3$ για το 2.

Ο Γ έχει πιθανότητα $1/4$ για το 2.

Έστω p_i η πιθανότητα με την οποία ο P πετυχαίνει την i επιλογή, και q_j η πιθανότητα με την οποία ο Γ πετυχαίνει την j .

Καλούμε τα διανύσματα $p = (p_1, \dots, p_m)$ στρατηγική του P και $q = (q_1, \dots, q_n)^t$ στρατηγική του Γ. Ισχύει ότι $\sum_i p_i = 1$ και $\sum_j q_j = 1$.

Για το παράδειγμά μας έχουμε ότι $p = (1/6, 1/3, 1/2)$ και $q = (1/4, 1/4, 1/3, 1/6)^t$.

Αν οι επιλογές των δυο παιχτών είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, τότε $p_i q_j$ είναι η πιθανότητα να επιτύχει ο P την i επιλογή και ο Γ την j . Το τίμημα σ' αυτή την περίπτωση είναι a_{ij} και η πιθανότητα της τιμής αυτής είναι επίσης $p_i q_j$.

Το άθροισμα

$$a_{11}p_1q_1 + \dots + a_{1n}p_1q_n + \dots + a_{m1}p_mq_1 + \dots + a_{mn}p_mq_n$$

δίνει το μέσο όρο του ποσού για τον P. Αυτή η τιμή καλείται **αναμενόμενη τιμή** για τον P.

Είναι γνωστό ότι αν το παίγνιο επαναληφθεί πολλές φορές, το αναμενόμενο κέρδος του παίχτη P θα δίνεται από το προηγούμενο άθροισμα.

Καλούμε

$$E(p, q) = \sum_{m \geq i \geq 1} \sum_{n \geq j \geq 1} a_{ij} p_i q_j$$

και τονίζουμε ότι αυτό το άθροισμα εξαρτάται από τις στρατηγικές p και q . Η ποσότητα αυτή δίνεται από το ακόλουθο γινόμενο πινάκων

$$E(p, q) = pAq$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο Γ θα πάρει $-E(p, q)$.

Για το παράδειγμά μας η ποσότητα αυτή είναι

$$E(p, q) = pAq = 13/72 = 0.1806\dots$$

Δηλαδή ο P θα πάρει 0.1806 - μονάδες (χρήματα) από τον Γ .

7.2 Παίγνια με επιλογή στρατηγικής

Υποθέσεις: Ο κάθε παίκτης μπορεί να αλλάξει τη στρατηγική του ανεξάρτητα από τον άλλο. Δηλαδή ο P προσπαθεί να αλλάξει τη στρατηγική του p ώστε η τιμή $E(p, q)$ να γίνει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη αλλά ταυτόχρονα και σίγουρη.

Θεώρημα 58 Υπάρχουν στρατηγικές p^* και q^* έτσι ώστε

$$E(p^*, q) \geq E(p^*, q^*) \geq E(p, q^*)$$

για κάθε στρατηγική p και q .

Έστω $u = E(p^*, q^*)$ τότε $E(p^*, q) \geq u \forall q$. Δηλαδή αν ο P διαλέξει την p^* τότε οποιαδήποτε στρατηγική και αν ακολουθήσει ο Γ το ποσό που θα κερδίσει ο P θα είναι πάντα μεγαλύτερο ή ίσο του u .

Για τον Γ έχουμε $u \geq E(p, q^*) \forall p$. Το κέρδος του Γ θα δίνεται από $-E(p, q^*) \geq -E(p^*, q^*) \forall p$. Άρα ο Γ θα πληρώσει μέχρι u όταν επιλέξει την q^* ανεξάρτητα από το τι θα κάνει ο P .

Ορισμός 59 Αν p^* και q^* είναι στρατηγικές τέτοιες ώστε

$$E(p^*, q) \geq E(p^*, q^*) \geq E(p, q^*)$$

για κάθε στρατηγική p και q , τότε

- i) η p^* καλείται βέλτιστη στρατηγική για τον P ,
- ii) η q^* καλείται βέλτιστη στρατηγική για τον Γ ,
- iii) η $u = E(p^*, q^*)$ καλείται η τιμή του παιγνίου.

Προσοχή. Η βέλτιστη στρατηγική δεν είναι απαραίτητως μοναδική. Αλλά όλες οι βέλτιστες στρατηγικές δίνουν την ίδια τιμή παιγνίου:

$$E(p^*, q^*) = E(p^{**}, q^{**})$$

Σημείωση. Για να βρεθούν οι βέλτιστες στρατηγικές χρησιμοποιούμε Γραμμικό Προγραμματισμό.

Ορισμός 60 Ένα στοιχείο a_{rs} του πίνακα πληρωμής A καλείται (saddle point) **ομφαλικό-σαγματικό** σημείο αν:

- ι) a_{rs} είναι η μικρότερη τιμή στη γραμμή της, δηλαδή $a_{rj} \geq a_{rs} \forall j$ και
 ιι) a_{rs} είναι η μεγαλύτερη τιμή στη στήλη της, δηλαδή $a_{is} \leq a_{rs} \forall i$.

Ένα παίγνιο του οποίου ο πίνακας πληρωμής έχει ένα σαγματικό σημείο καλείται **γνησίως καθορισμένος**.

Σημείωση. 1) Το σημείο αυτό έχει αντίστοιχες ιδιότητες που έχει και στον Απειροστικό λογισμό το σαγματικό σημείο συνάρτησης.

2) Αν ένας πίνακας έχει ομφαλικό σημείο a_{rs} , τότε οι ακόλουθες στρατηγικές είναι βέλτιστες

$$p^* = (0, \dots, 0, \underset{r}{1}, 0, \dots, 0)$$

$$q^* = (0, \dots, 0, \underset{s}{1}, 0, \dots, 0)^t$$

Αυτό φαίνεται αμέσως γιατί

$$p^* A q = (a_{r1}, \dots, a_{rn}) \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \sum_{n \geq j \geq 1} a_{rj} q_j \geq \sum_{n \geq j \geq 1} a_{rs} q_j \geq a_{rs}$$

$$E(p^*, q^*) = p^* A q^* = a_{rs}, a_{rs} \geq E(p, q^*), E(p^*, q) \geq a_{rs}$$

Θα εξηγήσουμε το ρόλο του σαγματικού σημείου με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 61 Έστω ότι ο πίνακας του παιγνίου είναι ο ακόλουθος:

$R \setminus G$	1	2	3
1	-5	11	-7
2	-2	8	-1
3	-3	-4	14

Ας υποθέσουμε ότι και οι δυο παίκτες παίζουν αμυντικά, δηλαδή να αποφύγουν το χειρότερο. Για τον P το χειρότερο της πρώτης στρατηγικής είναι το -7 , της δεύτερης το -2 και -4 της τρίτης. Από αυτά το καλύτερο είναι το -2 . Για τον δεύτερο παίχτη έχουμε 2 , -11 και -14 . Το καλύτερο από τα χειρότερα είναι το 2 το οποίο αντιστοιχεί στο $2-1$ στοιχείο του πίνακα και το οποίο είναι σαγματικό σημείο.

Η επιλογή αυτή έχει μεγάλη σταθερότητα και αν κάποιος από τους παίκτες ξεφύγει από αυτήν την επιλογή πιθανόν να εξαναγκασθεί να επανέλθει. Η σταθερότητα οφείλεται στην επόμενη εξίσωση :

Το Maximum των minimum του $R =$ -Το Maximum των minimum του C

Αν το παίγνιο έχει αυτήν την ιδιότητα, ο πίνακός του θα έχει σαγματικό σημείο. Όπως είναι φυσικό δεν ισχύει πάντα το προηγούμενο.

Παράδειγμα 62 Δύο τηλεοπτικοί σταθμοί P και Γ προγραμματίζουν μια ωριαία εκπομπή την ίδια χρονική περίοδο. Ο P έχει την επιλογή από τρία προγράμματα και ο Γ από τέσσερα. Και οι δύο σταθμοί ανάδεσαν σε μια εταιρεία να τους δώσει μια εκτίμηση της τηλεθέασης (επί τοις εκατό των τηλεθεατών) για όλα τα δυνατά ζεύγη προγραμμάτων. Η εταιρεία τους έδωσε τον ακόλουθο πίνακα ο οποίος εκφράζει την τηλεθέαση του P .

$R \setminus G$	1	2	3	4
1	60	20	30	55
2	70	75	45	60
3	70	45	35	30

Ποιο πρόγραμμα θα δώσει το μεγαλύτερο ακροατήριο σε κάθε σταθμό .

Θεωρούμε το πρόβλημα αυτό παίγνιο με δύο παίκτες μηδενικού αθροίσματος και ο πίνακας του παιγνίου είναι ο ακόλουθος

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -30 & -20 & 5 \\ 20 & 25 & -5 & 10 \\ 20 & -5 & -15 & -20 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας A δίνει το ποσοστό των τηλεθεατών που χάνει ο Γ ως προς τον P . Το ομφαλικό σημείο του A είναι το $q_{23} = -5$. Άρα το βέλτιστο πρόγραμμα για τον P είναι το 2 και το βέλτιστο για τον Γ το 3. Τότε ο P θα έχει ακροαματικότητα 45% και ο Γ 55%.

7.3 Πίνακας παιγνίων 2×2

Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Αν ο A είναι πίνακας γνησίως καθορισμένος τότε έχει ομφαλικό σημείο και η βέλτιστη λύση είναι γνωστή από τα προηγούμενα.

Έστω ότι το παίγνιο δεν είναι γνησίως καθορισμένο, τότε βρίσκουμε τις βέλτιστες τιμές ως εξής :

$$E(p, q) = a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{21}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2$$

$$p_1 + p_2 = 1, q_1 + q_2 = 1$$

$$E(p, q) = [(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})p_1 - (a_{22} - a_{21})]q_1 + (a_{12} - a_{22})p_1 + a_{22}$$

Έστω $p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$. Τότε $E(p^*, q) = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$ και αυτή η τιμή είναι ανεξάρτητη του q . Δηλαδή, αν ο P επιλέξει την στρατηγική $p^* = (p_1^*, 1 - p_1^*)$, τότε ο Γ δεν μπορεί να αλλάξει την τιμή του παιγνίου.

Αντίστοιχα, αν

$$q_1 = q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

$$E(p, q^*) = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

Δηλαδή $E(p^*, q) = E(p^*, q^*) = E(p, q^*)$, $\forall p, q$. Άρα σύμφωνα με τον ορισμό οι πιο πάνω στρατηγικές είναι οι βέλτιστες.

Θεώρημα 63 Για ένα παίγνιο με πίνακα 2×2 το οποίο δεν είναι γνωσίως καθορισμένο, οι βέλτιστες στρατηγικές είναι

$$p^* = \left(\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \right)$$

$$q^* = \left(\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \right)$$

και η τιμή είναι $E = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$.

Παράδειγμα 64 Το Υπουργείο Υγείας επιθυμεί να εμβολιάσει τους πολίτες εναντίον κάποιας γρίπης. Η γρίπη έχει δύο ιούς και δεν είναι γνωστό με τι αναλογία οι δύο ιοί εμφανίζονται. Δύο εμβόλια έχουν αναπτυχθεί με διαφορετικές δράσεις εναντίον των δύο ιών. Το εμβόλιο 1 είναι 85% αποτελεσματικό εναντίον του 1 και 70% εναντίον του 2. Το εμβόλιο 2 είναι 60% αποτελεσματικό εναντίον του 1 και 90% εναντίον του 2. Ποιος είναι ο καλύτερος εμβολιασμός;

Λύση 65 Θα το αντιμετωπίσουμε σαν ένα παίγνιο δύο παιχτών όπου ο P (η κυβέρνηση) επιθυμεί να κάνει την πληρωμή (την αποτελεσματικότητα εμβολιασμού) όσο το δυνατόν μεγαλύτερη. Ο παίχτης Γ (η γρίπη) επιθυμεί να κάνει την πληρωμή όσο το δυνατόν μικρότερη. Ο πίνακας είναι

		Ιος	
		1	2
Εμβολ	1	0,85	0,7
	2	0,6	0,9

Ο πίνακας αυτός δεν έχει ομφαλικά σημεία, οπότε εφαρμόζουμε το προηγούμενο Θεώρημα.

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{2}{3}, p_2^* = 1 - p_1^* = \frac{1}{3}$$

$$q_1^* = 4/9, q_2^* = 5/9$$

$$E = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = 0.766$$

Άρα η βέλτιστη στρατηγική για την κυβέρνηση είναι να εμβολιάζονται τα 2/3 του πληθυσμού με εμβόλιο 1 και 1/3 με το 2. Οπότε το 76.7% του πληθυσμού θα μπορεί να αντισταθεί στη γρίπη ανεξάρτητα από την κατανομή των ιών. Επίσης μια κατανομή γρίπης 4/9 του ιού 1 και 5/9 του ιού 2 θα έχει σαν αποτέλεσμα 76.7% αντίστασης του πληθυσμού, ανεξάρτητα από την στρατηγική που θα ακολουθήσει η κυβέρνηση.

7.4 Παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος και το δίλημμα του φυλακισμένου

Δύο ύποπτοι (A και B) συλλαμβάνονται έξω από ένα κατάστημα, το οποίο είχε ληστευθεί. Οι ύποπτοι ανακρίνονται χωριστά και πιέζονται να ομολογήσουν. Η κατάσταση εκτιμάται ως εξής :

- 1) Αν ομολογήσουν και οι δύο η ποινή που θα τους επιβληθεί θα είναι κανονική (θεωρούμε ότι χάνουν 4 μονάδες ο καθένας).
- 2) Αν δεν ομολογήσουν θα καταδικαστούν μόνο για διαρρηκτικά εργαλεία (κερδίζουν 1 μονάδα).
- 3) Αν ο ένας ομολογήσει και ο άλλος όχι, ο πρώτος θα αθωωθεί και ο δεύτερος θα καταδικαστεί βαριά (10 και -6 αντίστοιχα).

Θα θεωρήσουμε το πρόβλημα σαν παίγνιο με δυο παίχτες. Δυο στρατηγικές υπάρχουν σ' αυτό το παίγνιο: 1 ομολογία και 2 άρνηση. Ο πίνακας του 'παιγνίου' είναι :

	B_1	B_2
	-4	-6
A_1	-4	10
	10	1
A_2	-6	1

Όπως φαίνεται και από τον πίνακα, το παίγνιο αυτό δεν είναι μηδενικού αθροίσματος.

Η βέλτιστη στρατηγική είναι η 1-1 γιατί αν κάποιος αποφασίσει την 2 τότε

υπάρχει ο κίνδυνος για 2-1 ή 1-2, δηλαδή μόνος του θα επιφέρει την καταστροφή του.

Αν οι παίχτες συνεργάζονταν ή διάβαζαν ο ένας τη σκέψη του άλλου, θα επέλεγαν την 2-2. Κάθε ένας θα σκεφτόταν, όπως είναι αναμενόμενο σαυτές τις περιπτώσεις, να εκμεταλλευτεί τον άλλο και να ομολογήσει ώστε να ελευθερωθεί. Επειδή, προφανώς, κανείς δεν εμπιστεύεται τον άλλο θα οδηγηθούν στην 1-1.

Το ίδιο μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τους εξοπλισμούς μεταξύ Αμερικής και Ρωσίας. Κάθε υποψήφιος πρέπει να αποφασίσει για μείωση ή αύξηση των εξοπλισμών. Αν αυξήσουν και οι δύο θα κερδίσουν περισσότερα όπλα αλλά θα είναι οικονομικά πιο αδύνατοι. Αν μειώσουν και οι δύο θα αυξήσουν τα οικονομικά για άλλες χρήσιμες κοινωνικές παροχές. Αν μόνο η μια αυξήσει τότε θα έχει υπεροχή όπλων και θα μπορεί να επιβληθεί, λόγω γοήτρου ή και ισχύος, και σε άλλους τομείς.

Αυτό είναι μια απόδειξη του παραλόγου που επικρατεί μεταξύ ομάδων ανθρώπων σε πολλές περιπτώσεις στη ζωή. Πόλεμος τιμών μεταξύ μεγάλων εταιριών, βιομηχανία και προστασία περιβάλλοντος κ. α.

Ερώτηση. Αν το παίγνιο επαναλαμβάνεται το ίδιο για αρκετές φορές τι θα μπορούσαμε να προβλέψουμε; (Όπως το πρόβλημα των εξοπλισμών που επαναλαμβάνεται κάθε χρόνο.)

7.5 Βέλτιστη στρατηγική για παίγνια με δύο παίχτες

Παράδειγμα 66 Έστω ότι ο πίνακας παιγνίου δύο παιχτών είναι:

$R \setminus G$	1	2	3
1	8	-4	3
2	4	1	2
3	-2	0	0

Εδώ υπάρχει σαγματικό σημείο το 2-2 με τιμή 1. Είναι προφανές ότι ο Ρ θέλει να αποφύγει την τρίτη επιλογή και ο Γ την τρίτη επίσης. Τότε ο πίνακας θα γίνει

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Πάλι ο Γ θα αποφύγει την πρώτη επιλογή οπότε ο πίνακας θα ελαττωθεί στον

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Προφανώς ο P θα επιλέξει την δεύτερη επιλογή και θα κερδίσει 1 μονάδα. Το 1 είναι το (2,2) στοιχείο του πίνακα και έχει την ιδιότητα να είναι ελάχιστο στη γραμμή του και μέγιστο στη στήλη του.

Παράδειγμα 67 Έστω ότι ο πίνακας του παιχνιδιού είναι

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -3 & -4 \\ 6 & -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας αυτός δεν έχει σαγματικό σημείο και θα προσπαθήσουμε και εδώ να βρούμε ποιές είναι βέλτιστες στρατηγικές. Προφανώς η δεύτερη επιλογή δεν είναι καλή για τον P οπότε θα πρέπει να την αποφύγει. Το ίδιο ισχύει για την πρώτη για τον Γ . Ο πίνακας τώρα γίνεται :

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Επίσης η τέταρτη επιλογή δεν είναι αποτελεσματική για τον Γ . Άρα

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι οι καλύτερες επιλογές για τους δύο παίκτες. Θα μπορούσαμε να μελετήσουμε επίσης τις

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Αν p είναι η πιθανότητα για την πρώτη επιλογή του P και q για τον Γ τότε ο πρώτος παίχτης θα έχει μέση τιμή

$$E = pq5 - p(1-q)2 - (1-p)q5 + (1-p)(1-q)0 \text{ δηλαδή}$$

$$E = 12pq - 2p - 5q = 12p(q - 1/6) - 5q + 5/6 - 5/6 = 12(p - 5/12)(q - 1/6) - 5/6.$$

Αν $p = 5/12$ τότε ο P χάνει $5/6$ μονάδες. Έστω ότι $p > 5/12$ τότε ο Γ μπορεί να παίξει με $q < 1/6$ οπότε να μεγαλώσει το κέρδος του. Αντίθετα αν $p < 5/12$ τότε ο Γ με $q > 1/6$ μπορεί πάλι να μεγαλώσει το κέρδος του. Βλέπουμε λοιπόν ότι η καλύτερη τιμή για τον P είναι το $-5/6$. Το οποίο επίσης είναι το καλύτερο για τον Γ για τους ίδιους λόγους.

Στρατηγικές τέτοιου είδους ονομάζονται **μικτές στρατηγικές**.

Σημείωση: Σ' αυτήν την περίπτωση κάθε παίχτης έχει μόνο δύο στρατηγικές. Αν ένας παίχτης έχει περισσότερες τότε χρειαζόμαστε γραμμικό προγραμματισμό για την εύρεση της βέλτιστης.

7.6 Μέθοδος εύρεσης βέλτιστης στρατηγικής

1) Εξετάζουμε για σαγματικό σημείο. Αν υπάρχει, το παίγνιο θα σταθεροποιηθεί σ' αυτήν την τιμή.

2) Ελαττώνουμε τον πίνακα προσέχοντας ποιες στρατηγικές είναι ασύμφορες για κάθε παίκτη μέχρι ο πίνακας να ελαττωθεί σε 2×2 .

3) Μετά βρίσκουμε τη μικτή στρατηγική με τις πιθανότητες.

7.7 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Δείξτε ότι τα στοιχεία της βέλτιστης στρατηγικής είναι αριθμοί αυστηρά μεταξύ 0 και 1.

2) Κατασκευάστε ένα παίγνιο του οποίου η βέλτιστη στρατηγική δεν είναι μοναδική.

3) Έστω το ακόλουθο παίγνιο: Ο παίκτης P έχει δύο τραπουλόχαρτα, έναν μαύρο άσσο και ένα κόκκινο τρία. Ο Γ έχει ένα μαύρο δύο και ένα κόκκινο τρία. Κάθε παίκτης διαλέγει μυστικά ένα από τα χαρτιά του. Αν και οι δύο διαλέξουν το ίδιο χρώμα, τότε ο Γ πληρώνει τον P όσο είναι το άθροισμα των χαρτιών. Αν είναι διαφορετικού χρώματος, ο P πληρώνει τον Γ όσο είναι το άθροισμα των χαρτιών. Βρείτε τη βέλτιστη στρατηγική για κάθε παίκτη και την τιμή του παιγνίου.

4) Έστω το ακόλουθο παίγνιο: Δύο παίκτες τραβούν (δείχνουν) ταυτόχρονα ένα ή δύο από τα δακτύλά τους. Ας είναι ς το άθροισμα αυτών των δακτύλων. Αν το ς είναι άρτιο, ο δεύτερος πληρώνει τον πρώτο όσο το ς , διαφορετικά πληρώνει ο πρώτος. Βρείτε τις βέλτιστες στρατηγικές και την τιμή του παιγνίου.

5) Έστω ότι ο πίνακας ενός παιγνίου είναι ο ακόλουθος:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	-4	3	2
A_2	-7	3	3	0
A_3	0	-4	2	1
A_4	1	-5	3	0

Βρείτε την καλύτερη στρατηγική για κάθε παίκτη και την τιμή του παιγνίου.

6) Το Υπουργείο Εσωτερικών επιθυμεί να χρηματοδοτήσει τους δημοσίους υπαλλήλους εναντίον της διαφθοράς. Η διαφθορά εξαρτάται από δύο βασικούς παράγοντες A και B (είναι ευνόητο ποιοί είναι αυτοί) και δεν είναι γνωστό το ποσοστό με το οποίο αυτοί εμφανίζονται. Το Υπουργείο έχει προτείνει δύο μέτρα αντιμετώπισης 1 και 2 με διαφορετικές δράσεις εναντίον

των δύο παραγόντων διαφθοράς. Το μέτρο 1 είναι 70% αποτελεσματικό εναντίον του πρώτου παράγοντα και 60% εναντίον του δευτέρου. Το μέτρο 2 είναι 60% αποτελεσματικό εναντίον του πρώτου και 90% εναντίον του δευτέρου. Ποιος είναι ο καλύτερος συνδιασμός εφαρμογής μέτρων;

7) Δύο εταιρείες τηλεφωνίας Ρ και Γ προγραμματίζουν μια οικονομική προσφορά. Η Ρ έχει την επιλογή από τρία πακέτα και η Γ από τέσσερα. Και οι δύο εταιρείες ανάθεσαν σε μια εταιρεία δημοσκόπησης να τους δώσει μια εκτίμηση της προτίμησης των πελατών (επί τοις εκατό) για όλα τα δυνατά ζεύγη πακέτων. Η εταιρεία τους έδωσε τον ακόλουθο πίνακα ο οποίος εκφράζει την προτίμηση ως προς την Ρ.

$R \setminus G$	1	2	3	4
1	70	30	40	65
2	80	85	55	70
3	80	55	45	40

Ποιο πακέτο θα δώσει το μεγαλύτερο ποσοστό σε κάθε σταθμό;

Κεφάλαιο 8

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Στην ενότητα αυτή θα συζητήσουμε δύο οικονομικά μοντέλα. Το μοντέλο εσόδων-εξόδων (κλειστό μοντέλο) και το μοντέλο παραγωγής (ανοικτό μοντέλο), τα οποία μελετήθηκαν από τον νομπελίστα οικονομολόγο **Leontief**. Αυτό το μοντέλο θεωρείται από τις μεγαλύτερες επιτυχίες των μαθηματικών στα οικονομικά.

8.1 Μοντέλο Εσόδων - Εξόδων (Κλειστό)

Στο πρώτο μοντέλο η πρωταρχική ιδέα επικεντρώνεται στην ισορροπία μεταξύ των εσόδων και εξόδων ενός συνόλου παραγωγικών μονάδων, όπως εργοστασίων ή κατασκευαστών. Θα μπορούσε να παρομοιασθεί με οικονομίες χωρών οι οποίες θεωρούνται αυτάρκεις. Μπορεί να θεωρηθεί ξεπερασμένο την εποχή της παγκοσμιοποίησης αλλά ταυτόχρονα είναι πάντα επίκαιρο αν εκφράζει τις παραγωγικές αλληλεπιδράσεις του πλανήτη μας.

Παράδειγμα 68 *Τρεις ιδιοκτήτες διαμερισμάτων - ένας (Ξ) ξυλουργός, ένας (Η) ηλεκτρολόγος και ένας (Υ) υδραυλικός - συμφώνησαν να επισκευάσουν τα τρία σπίτια τους. Συμφώνησαν να δουλέψουν συνολικά δέκα ημέρες ο καθένας, σύμφωνα με το επόμενο πρόγραμμα το οποίο εκφράζει τις ημέρες που εργάστηκε ο καθένας.*

Εργασία/Σπίτι	Ξ	Η	Υ
Ξ	2	4	4
Η	1	5	4
Υ	6	1	3

Για λόγους φόρου, πρέπει να δηλώσουν και να πληρώσουν ο ένας τον άλλο ένα λογικό ημερομίσθιο, ακόμα και για την δουλειά που προσφέρουν στο ίδιο τους το σπίτι. Τα κανονικά ημερομίσθιά τους κυμαίνονται μεταξύ 100-150 ευρώ αλλά συμφώνησαν να πληρωθούν έτσι ώστε να μην ζημιωθεί κανείς. Δηλαδή όσα πληρώνει ο καθένας τόσα να κερδίζει.

Έστω p_1 να είναι το ημερομίσθιο του ξυλουργού, p_2 το ημερομίσθιο του ηλεκτρολόγου και p_3 το ημερομίσθιο του υδραυλικού. Για την ισορροπία των εσόδων - εξόδων πρέπει:

$$\Xi \quad 2p_1 + p_2 + 6p_3 = 10p_1$$

$$H \quad 4p_1 + 5p_2 + p_3 = 10p_2$$

$$Y \quad 4p_1 + 4p_2 + 3p_3 = 10p_3$$

Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & -0.6 \\ -0.4 & 0.5 & -0.1 \\ -0.4 & -0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Τελικά η λύση δίνεται από τη σχέση $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 31 \\ 32 \\ 36 \end{pmatrix}$ για κάθε πραγματικό αριθμό t ο οποίος ικανοποιεί τις απαιτούμενες συνθήκες.

Θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε τους προηγούμενους τεχνίτες, παραδείγματος χάριν, με εργοστάσια άνθρακος (κάρβουνου), ηλεκτρικής ενέργειας και ατσαλιού.

Το προηγούμενο μοντέλο περιγράφει τα χαρακτηριστικά μιας κλειστής οικονομίας. Φυσικά αυτή την εποχή δεν είναι τόσο επίκαιρο όσο ήταν παλαιότερα.

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των στηλών στον προηγούμενο πίνακα είναι 0 και το πρόβλημα είναι να βρεθούν λογικές τιμές ώστε το σύστημα να βρίσκεται σε ισορροπία.

Ας μελετήσουμε το πρόβλημα γενικά. Έστω ένα οικονομικό σύστημα που αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό διακεκριμένων βιομηχανιών: $1, 2, \dots, k$. Για κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, κάθε βιομηχανία παράγει ένα συγκεκριμένο προϊόν ή προσφέρει υπηρεσίες και αγοράζει προϊόντα ή υπηρεσίες από τις άλλες. Ένα σημαντικό πρόβλημα είναι να βρεθούν κατάλληλες τιμές για τα k προϊόντα ώστε τα έσοδα κάθε βιομηχανίας να είναι ίσα με τα έξοδα. Οι τιμές αυτές δίνουν μια κατάσταση ισορροπίας για την οικονομία.

Έστω p_i να συμβολίζει την τιμή που χρεώνει η i βιομηχανία για το σύνολο του προϊόντος της. Με e_{ij} θα συμβολίζουμε το ποσοστό του j προϊόντος το οποίο αγοράζει η i βιομηχανία, δηλαδή τι ποσοστό j προϊόντος αγοράζει η i βιομηχανία για την παραγωγή της.

Προφανώς ισχύουν οι εξής περιορισμοί:

$$p_i \geq 0, \quad 1 \geq e_{ij} \geq 0, \quad e_{1j} + e_{2j} + \dots + e_{kj} = 1$$

Έστω $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix}$ και $E = \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{k1} & \dots & e_{kk} \end{pmatrix}$ ο καλούμενος πίνακας

συναλλαγής.

Για το προηγούμενο παράδειγμα ο πίνακας συναλλαγής είναι $E = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$. Δηλαδή ο πίνακας του προηγούμενου παραδείγματος

αφού όλα τα στοιχεία του διαιρεθούν με 10.

Σύμφωνα με την υπόθεση του μοντέλου πρέπει

$$Ep = p \quad \iff \quad (I - E)p = \bar{0}$$

και τότε υπάρχει μη τετριμμένη λύση, αν η ορίζουσα του πίνακα $I - E$ είναι μηδέν και η λύση πρέπει να είναι μη-αρνητική. Σημειώνουμε ότι p είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα E για την ιδιοτιμή 1.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας πίνακας A είναι μη αρνητικός, αν κάθε στοιχείο του είναι μη αρνητικό. Συμβολικά: $A \geq \mathbf{0}$. Και θετικός, αν κάθε στοιχείο του είναι θετικό.

Επίσης λέμε ότι $A > B$ ή $A \geq B$ αν $A - B > \mathbf{0}$ ή $A - B \geq \mathbf{0}$.

Το ακόλουθο θεώρημα παρέχει αναγκαίες συνθήκες ώστε το σύστημα να έχει κατάσταση ισορροπίας και η οικονομία να είναι ανεξάρτητη.

Θεώρημα 69 Έστω E ένας πίνακας συναλλαγής ώστε για κάποιο φυσικό m , όλα τα στοιχεία του πίνακα E^m είναι θετικά. Τότε υπάρχει ακριβώς μια γραμμικά ανεξάρτητη λύση της εξίσωσης $(I - E)p = \bar{0}$ και όλες οι τιμές της είναι θετικές.

Σχόλιο 70 Ουσιαστικά το προηγούμενο είναι μια ειδική περίπτωση μιας διαδικασίας Markov όπου ο E είναι ο πίνακας μετάβασης του συστήματος και p η κατάσταση ισορροπίας. Εδώ φυσικά κάθε πολλαπλασιασμός της λύσης, είναι επίσης αποδεκτή λύση.

Παράδειγμα 71 (Συνέχεια) Ο πίνακας $E = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$ είναι θετικός και σύμφωνα με το θεώρημα υπάρχει $p > \bar{0}$ ώστε $(I - E)p = \bar{0}$.

8.2 Μοντέλο Παραγωγής (Ανοικτό)

Η διαφορά με το προηγούμενο μοντέλο είναι ότι η παραγωγή δεν μοιράζεται μόνο μεταξύ των βιομηχανιών παραγωγής αλλά ικανοποιεί και κάποια ζήτηση. Στο ανοικτό μοντέλο οι τιμές είναι σταθερές και το πρόβλημα είναι να βρεθούν τα ποσοστά παραγωγής ώστε να ικανοποιείται η ζήτηση. Εδώ υποθέτουμε ότι όλες οι ποσότητες θα εκφράζονται σε χρήματα.

Έστω x_i να εκφράζει την τιμή του συνόλου του i προϊόντος,

d_i την τιμή του i προϊόντος για να ικανοποιήσει τη ζήτηση, και

c_{ij} την τιμή του i προϊόντος που χρειάζεται η j βιομηχανία για να παράγει προϊόντα αξίας μιας μονάδας. Δηλαδή πόσο πληρώνει η j βιομηχανία στην i για να παράγει προϊόντα αξίας μιας μονάδας.

Έστω $X = (x_1, \dots, x_k)$ να είναι το διάνυσμα παραγωγής, $d = (d_1, \dots, d_k)$ το διάνυσμα ζήτησης, και ο **πίνακας κατανάλωσης**

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kk} \end{pmatrix}$$

Επίσης ισχύει ότι X , C , και $d \geq \bar{0}$.

Προφανώς πρέπει να ισχύει ότι $d = X - CX = (I - C)X$. Το πρόβλημα σ' αυτό το μοντέλο είναι να βρεθεί το X όταν δίνονται τα d και C .

Παράδειγμα 72 *Μια πόλη έχει τρεις βιομηχανίες: μια εξόρυξης άνθρακα, μια παραγωγής ρεύματος και ένα τοπικό σιδηρόδρομο. Για την εξόρυξη 1 εκ. άνθρακα πρέπει να πληρωθούν 0.25 εκ. για ρεύμα και 0.25 εκ. για μεταφορά. Για παραγωγή 1 εκ. ρεύματος, πρέπει να αγοραστούν 0.65 εκ. κάρβουνο 0.25 εκ. ρεύμα και 0.05 εκ. για μεταφορά. Για να προσφερθούν 1 εκ. μεταφορικές υπηρεσίες, πρέπει να αγοραστούν 0.55 εκ. κάρβουνο και 0.1 εκ. ρεύμα. Αν το ορυχείο δεχθεί παραγγελία 50.000 εκ. άνθρακα από κάποια αγορά, η εταιρεία ρεύματος 25.000 εκ. για ρεύμα από άλλη πόλη, πόση θα πρέπει να είναι η παραγωγή των τριών εργοστασίων ώστε να εκπληρωθούν όλες οι παραγγελίες.*

Έστω x_1 να είναι η τιμή συνολικής παραγωγής του ορυχείου, x_2 η τιμή ρεύματος, και x_3 η τιμή προσφοράς υπηρεσιών από το σιδηρόδρομο.

Ο πίνακας κατανάλωσης είναι $C = \begin{pmatrix} 0 & 0.65 & 0.55 \\ 0.25 & 0.25 & 0.1 \\ 0.25 & 0.05 & 0 \end{pmatrix}$. Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} (I - C)X &= d = (50000, 25000, 0)^t \\ X &= (I - C)^{-1}d = (102087, 56163, 28330)^t. \end{aligned}$$

Σχόλιο 73 Αν ο $(I-C)$ είναι αντιστρέψιμος και μη αρνητικός επειδή και $d \geq \bar{0}$, θα πρέπει $X \geq \bar{0}$. Δηλαδή κάθε απαίτηση θα μπορεί να ικανοποιηθεί.

Ο πίνακας C είναι ένας ενδομορφισμός του χώρου Banach \mathbf{R}^n και αν ορίσουμε τη μη-γραμμική απεικόνιση $Ax = d + Cx$ τότε η ζητούμενη λύση είναι ένα σταθερό της σημείο. Αποδεικνύεται στη συναρτησιακή ανάλυση (η συγκεκριμένη απόδειξη είναι εύκολη και προτείνεται σαν άσκηση) ότι αν $\|C\| < 1$ τότε η προηγούμενη απεικόνιση έχει σταθερό σημείο το οποίο δίνεται σαν το όριο της ακολουθίας του Neumann: $\sum_{i=0}^{\infty} C^i d$.

Το πρόβλημα σ αυτά τα μοντέλα είναι η συνθήκη της νόρμας. Σημειώνουμε επίσης ότι αν ο C ήταν ορισμένος στο μιγαδικό χώρο C^n , δηλαδή ένα διάνυσμα με μιγαδικές συνιστώσες είναι επιτρεπτό, τότε το πρόβλημα θα είχε λύση αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του C βρίσκονταν μέσα στο μοναδιαίο δίσκο του μιγαδικού επιπέδου.

Ορισμός 74 Ένας πίνακας κατανάλωσης C καλείται παραγωγικός αν $(I - C)^{-1}$ υπάρχει και είναι μη αρνητικός.

Το πρόβλημα λοιπόν μεταφέρεται στην εύρεση κριτηρίων ώστε ένας πίνακας κατανάλωσης να είναι παραγωγικός.

Θεώρημα 75 Ένας πίνακας κατανάλωσης C είναι παραγωγικός αν και μόνο αν υπάρχει διάνυσμα παραγωγής X ώστε $X \geq \bar{0}$ με $X \neq \bar{0}$ και $X > CX$.

Απόδειξη. Το θεώρημα αποδεικνύεται ακολουθώντας τα επόμενα βήματα:

' \implies ' Έχουμε ότι υπάρχει ο $(I - C)^{-1}$ και $(I - C)^{-1} \geq 0$ (θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει $X > \bar{0}$ με $X > CX$).

Ας υποθέσουμε ότι για κάθε $X \geq \bar{0}$ έχουμε $CX \geq X$ και $X \neq \bar{0}$, τότε

$$\bar{0} \geq (I-C)X \implies \bar{0} \geq (I-C)X = Y \implies \bar{0} \geq X = (I-C)^{-1}Y.$$

Άρα $X = \bar{0}$. Το οποίο είναι άτοπο.

' \impliedby ' 1) Αν υπάρχει $X \geq \bar{0}$ με $CX < X$, τότε $X > \bar{0}$. Διότι αν $x_i = 0$, τότε το μηδέν θα είναι μεγαλύτερο του i -στοιχείου του CX το οποίο είναι μεγαλύτερο ή ίσον με μηδέν (ο C είναι πίνακας κατανάλωσης).

2) Έστω η απεικόνιση $F(t) = tX - CX$. Η F είναι συνεχής με $F(0) < \bar{0}$ και $F(1) > \bar{0}$. Άρα υπάρχει λ ώστε $0 < \lambda < 1$ και $CX < \lambda X$.

3) Από την προηγούμενη σχέση έχουμε ότι $C^n X < \lambda C^{n-1} X < \dots < \lambda^n X$.

4) Επειδή $0 < \lambda < 1$ και $X > \bar{0}$ έχουμε ότι $C^n \rightarrow \mathbf{0}$.

5) Η αντίστοιχη ταυτότητα για τους πραγματικούς αριθμούς ισχύει και στους πίνακες: $(I - C)(I + C + C^2 + \dots + C^{n-1}) = I - C^n$.

6) Ας πάρουμε το όριο της προηγούμενης σχέσης το οποίο προφανώς υπάρχει. Τότε θα έχουμε ότι υπάρχει $S = \lim(I + C + \dots + C^{n-1})$ και $(I - C)S = I$.

7) Επίσης ισχύει ότι $S \geq \bar{0}$ και $(I - C)S = I$.

8) Άρα $S = (I - C)^{-1}$ και ο C είναι παραγωγικός πίνακας κατανάλωσης.

■

Το Θεώρημα μας λει ότι υπάρχει κάποια παραγωγή ώστε κάθε βιομηχανία παράγει περισσότερο από ότι καταναλώνει. Κάτι δηλαδή το οποίο είναι τελείως φυσικό στην οικονομία. Ζητούμε λοιπόν να υπάρχει ο $(I - C)^{-1}$ και να είναι θετικός. Αυτό εξαρτάται από την κυριαρχούσα ιδιοτιμή του C , η οποία θα πρέπει να είναι μικρότερη της μονάδας. Έστω ότι υπάρχει ο $(I - C)^{-1}$, τότε αν η κυριαρχούσα ιδιοτιμή του C είναι λ (οποία είναι θετική), του πίνακα $(I - C)^{-1}$ είναι $1/(1 - \lambda)$. Επίσης θετική, και έχουν το ίδιο θετικό ιδιοδιάνυσμα. $Cu = \lambda u \Rightarrow u - Cu = u - \lambda u \Rightarrow (I - C)u = (1 - \lambda)u$ και $\lambda \neq 1$. Άρα $(I - C)^{-1}u = (1 - \lambda)^{-1}u$.

Επιγραμματικά:

Εάν $\lambda > 1$, ο $(I - C)^{-1}$ δεν είναι μη αρνητικός.

Εάν $\lambda = 1$, ο $(I - C)^{-1}$ δεν υπάρχει.

Εάν $\lambda < 1$, ο $(I - C)^{-1}$ είναι άθροισμα μη αρνητικών πινάκων από το 6).

Πόρισμα 76 Ένας πίνακας κατανάλωσης C είναι παραγωγικός αν το άθροισμα κάθε γραμμής του είναι μικρότερο από ένα: $C1 < 1$ όπου 1 είναι ο πίνακας στήλη με στοιχεία μονάδες.

Απόδειξη. Έστω $X = (1, \dots, 1)^t$ και $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \dots & c_{kk} \end{pmatrix}$ με

$\sum_{i=1}^k c_{ji} < 1$. Τότε $CX = (\sum c_{1j}, \dots, \sum c_{kj})^t < (1, \dots, 1)^t = X$. ■

Πόρισμα 77 Ένας πίνακας κατανάλωσης C είναι παραγωγικός, αν το άθροισμα κάθε στήλης είναι μικρότερο από ένα: $1^t C < 1^t$ όπου 1 το διάνυσμα με στοιχεία μονάδες.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε γνωστές σχέσεις από τη γραμμική άλγεβρα.

i) $(AB)^t = B^t A^t$.

ii) $(AA^{-1})^t = I^t = I \implies (A^{-1})^t A^t = I \implies (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

iii) $|A| = |A^t|$.

Ο C^t έχει το άθροισμα κάθε γραμμής μικρότερο από τη μονάδα. Άρα σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα ισχύει ότι υπάρχει ο $(I - C^t)^{-1}$ και είναι μη αρνητικός.

$$((I - C)^t)^{-1} = ((I - C)^{-1})^t \implies \exists (I - C)^{-1}.$$

■

Έχουμε ήδη ορίσει τη νόρμα $\|A\|$ ενός πίνακα A η οποία ορίζεται με πολλούς τρόπους: Υπενθυμίζουμε ότι είναι το μικρότερο φράγμα ώστε να ισχύει η επόμενη ανίσωση για κάθε διάνυσμα x

$$\|A\| \|x\| \geq \|Ax\|$$

Εδώ η νόρμα του x ορίζεται ανάλογα. Είναι γνωστό ότι η λέξη νόρμα χρησιμοποιείται για να δηλώσει το μέγεθος κάποιας μαθηματικής έννοιας. Για τους αριθμούς είναι η απόλυτη τιμή ενώ για τα διανύσματα x συνήθως παίρνουμε την Ευκλείδεια νόρμα $|x|$ η οποία έχει πολλές γεωμετρικές ιδιότητες $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Δυστυχώς η προηγούμενη νόρμα για έναν πίνακα A είναι πολύ δύσκολο να υπολογισθεί στην πράξη εκτός από μεμονωμένα παραδείγματα. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούμε, όπως έχουμε δει προηγουμένως, τη νόρμα αθροίσματος ενός διανύσματος x ως εξής :

$$|x|_1 = \sum_i |x_i|$$

Κατά συνεπείαν ορίζεται και η νόρμα αθροίσματος $\|A\|_1$ ενός πίνακα A όπως προηγουμένως. Για την καινούργια νόρμα έχουμε ήδη δείξει ότι ισχύει:

Πρόταση 78 $\|A\|_1 = \max\{|a_j^{(c)}|_1 \mid n \geq j \geq i\}$ όπου $a_j^{(c)}$ είναι η j στήλη του A .

Επανερχόμαστε τώρα στο ανοικτό μοντέλο του Leontief. Σύμφωνα με τα τελευταία πορίσματα ισχύει ότι, αν ο C είναι ο πίνακας παραγωγής, τότε το μοντέλο θα έχει πάντα λύση, αν $\|C\|_S < 1$.

Λήμμα 79 Έστω C ένας πίνακας ώστε $\|C\| < 1$ (με οποιαδήποτε νόρμα). Τότε

$$(I - C)^{-1} = \sum_{k=0} C^k = I + C + C^2 + \dots$$

Απόδειξη. Προφανώς η πρόταση που εκφράζει το λήμμα είναι γενίκευση της γνωστής γεωμετρικής σειράς $1/(1-a) = 1 + a + a^2 + \dots$ Η προηγούμενη

σειρά συγκλίνει μόνο όταν $|a| < 1$. Επειδή ισχύει ότι $\|C\| < 1$ θα έχουμε ότι $|c_{ij}| < 1$ για κάθε i, j . Επίσης $\|C\|^k \geq \|C^k\|$, και $\|C\|^k \rightarrow 0$ και αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο του C^k συγκλίνει στο 0. Άρα στην πράξη αρκεί να υπολογίσουμε μέχρι κάποια δύναμη του C γιατί οι υπόλοιπες δυνάμεις είναι σχεδόν μηδενικοί πίνακες. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να πούμε ότι

$$(I - C)^{-1} \approx I + C + \dots + C^k$$

για κάποιο k ανάλογα με το επιθυμητό σφάλμα. ■

8.3 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Τρεις μηχανικοί (ένας πολιτικός, Π, ένας ηλεκτρολόγος, Η και ένας μηχανολόγος, Μ) έχουν ο κάθε ένας ένα τεχνικό γραφείο. Αυτοί κάνουν μελέτες και για τις τρεις ειδικότητες, αγοράζοντας υπηρεσίες ο ένας από τον άλλο. Για υπηρεσίες 1000 ευρώ του Π χρειάζεται 100 ευρώ υπηρεσίας του Η και 300 ευρώ από τον Μ. Για 1000 ευρώ του Η χρειάζονται 200 από τον Π και 400 από τον Μ. Και για 1000 ευρώ του Μ χρειάζονται 300 από τον Π και 400 από τον Η. Κάποια εβδομάδα ο Π ανέλαβε υπηρεσίες 500.000, ο Η 700.000 και ο Μ 600.000. Πόση είναι η καθαρή αμοιβή του καθενός;

2) Η οικονομία μιας πόλης στηρίζεται στις εξής βιομηχανίες: μια ενέργειας, Ε, μια κατασκευών, Κ, μια μεταφορών, Μ, και μια σιδήρου, Σ. Ο πίνακας κατανάλωσης των προηγούμενων βιομηχανιών δίνεται ως ακολούθως:

	Ε	Κ	Μ	Σ
Ε	0.4	0.3	0.2	0
Κ	0.2	0.3	0.2	0.1
Μ	0.2	0.2	0	0.1
Σ	0.2	0.1	0.1	0

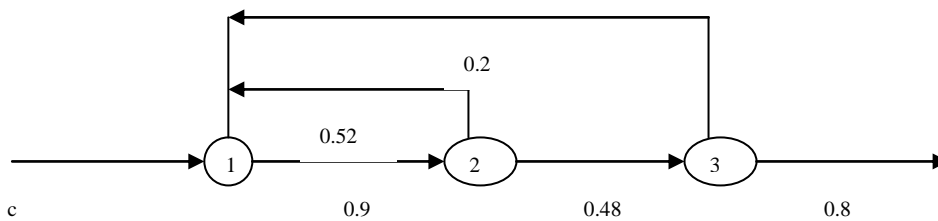
Αν η εξωτερική ζήτηση για κάποια συγκεκριμένη περίοδο είναι 100, 50, 100, και 0 αντίστοιχα, πόση πρέπει να είναι η συνολική παραγωγή για κάθε εργοστάσιο; (χρησιμοποιήστε επαναληπτική μέθοδο για την εύρεση της λύσης.)

3) Έστω το σύστημα $AX = d$ όπου $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & 8 \\ -3 & 10 & -3 \end{pmatrix}$ και $d = (10, 20, 30)^t$. Εξετάστε αν το σύστημα έχει λύση χωρίς να χρησιμοποιήσετε ορίζουσες παρά μόνο προσθέσεις και πολλαπλασιασμούς πινάκων.

4) Δείξτε ότι ένας πίνακας κατανάλωσης C σε ένα ανοικτό μοντέλο είναι παραγωγικός για κάθε διάνυσμα ζήτησης d , αν $\|C\|_S < 1$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ - ΑΣΚΗΣΗ: Έστω γραμμή παραγωγής η οποία αποτελείται από τρεις μονάδες: 1, 2, και 3. Σε κάθε μονάδα χρόνου (t ώρες) τα προϊόντα κινούνται από την 1 στην 2 στην 3 και μετά πακετάρονται. Πρώτες ύλες για την παραγωγή c προϊόντων παρέχονται στην 1 κάθε μονάδα χρόνου. Από την 1, το 90% των προϊόντων προωθούνται στην 2. Από την 2, το 52% επιστρέφουν στην 1 (ελαττωματικά) και τα υπόλοιπα προωθούνται στην 3. Από την 3, το 20% επιστρέφει στην 1 και τα υπόλοιπα πακετάρονται. Βρείτε την τιμή του c ώστε 100 προϊόντα να πακετάρονται κάθε χρονική μονάδα. Μπορείτε να βρείτε μετά από πόσες μονάδες χρόνου η παραγωγή θα είναι περίπου σταθερή;

Σχήμα 8.1:



Έστω $x_i^{(n)}$ ο αριθμός προϊόντων στη μονάδα $i = 1, 2, 3$ την χρονική περίοδο t_n . Τότε

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= 0.52x_2^{(n)} + 0.2x_3^{(n)} + c \\ x_2^{(n+1)} &= 0.9x_1^{(n)} \\ x_3^{(n+1)} &= 0.48x_2^{(n)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$x^{(n+1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0.52 & 0.2 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.48 & 0 \end{bmatrix} x^{(n)} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = Cx^{(n)} + c\varepsilon_1.$$

Δηλαδή, $x^{(n)} = C^n x^{(0)} + (I + C + C^2 + \dots + C^{n-1})c\varepsilon_1$.

Γνωρίζουμε ότι $\|C\| \geq |\lambda_i|$ και επειδή $\|C\|_1 < 1$, έχουμε ότι $|\lambda_i| < 1$.

Επίσης, για $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X > CX \Rightarrow \exists (I - C)^{-1}$ και $C^n \rightarrow 0$. Άρα, για μεγάλο n έχουμε:

$$x^{(n)} \approx (I + C + C^2 + \dots + C^{n-1})c\varepsilon_1 \approx (I - C)^{-1}c\varepsilon_1.$$

Με υπολογισμούς βρίσκουμε ότι:

$$(I - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 2.2442 & 1.3824 & 0.44883 \\ 2.0197 & 2.2442 & 0.40395 \\ 0.96948 & 1.0772 & 1.1939 \end{pmatrix}.$$

Επίσης, για $n = 10$: $(I + C + C^2 + \dots + C^{n-1}) \approx \begin{pmatrix} 2.148 & 1.3 & 0.423 \\ 1.9 & 2.15 & 0.374 \\ 0.9 & 1.01 & 1.175 \end{pmatrix}.$

Κεφάλαιο 9

ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ

9.1 ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ

Είναι γνωστό ότι οι αρκούδες στην οροσειρά της Πίνδου είναι προστατευόμενο είδος. Γνωστό είναι επίσης ότι ο πληθυσμός τους ελαττώνεται λόγω λαθροθηρίας και δηλητηριασμού τους. Αν γνωρίζουμε τον συνολικό πληθυσμό τους μπορούμε να βρούμε μέχρι πόσες αρκούδες μπορούν να αφαιρούνται (για οποιονδήποτε λόγο) κάθε χρόνο ώστε να συνεχίσουν να αναπτύσσονται χωρίς κίνδυνο εξαφάνισης;

Με το πρόβλημα της εξέλιξης πληθυσμών θα ασχοληθούμε σ' αυτό το μοντέλο. Το πιο συνηθισμένο μοντέλο εξέλιξης πληθυσμού που χρησιμοποιείται στη δημογραφία είναι το μοντέλο του **Leslie** (1940) και περιγράφει την εξέλιξη ενός θηλυκού πληθυσμού. Ο θηλυκός πληθυσμός διαιρείται σε κλάσεις ηλικίας ίσης διάρκειας. Αν η μέγιστη ηλικία του συγκεκριμένου είδους είναι L χρόνια και τη χωρίσουμε σε n κλάσεις τότε κάθε κλάση έχει L/n χρόνια διάρκεια.

<i>Κλάσεις</i>	<i>Διαστήματα</i>
1	$[0, L/n)$
2	$[L/n, 2L/n)$
\vdots	\vdots
n	$[(n-1)L/n, L]$

Έστω ότι αρχικά ($t = 0$) γνωρίζουμε τον αριθμό των θηλυκών για κάθε

κλάση.

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Εδώ το $x_i^{(0)}$ εκφράζει τον αριθμό των θηλυκών στην κλάση i .

Το $x^{(0)}$ καλείται *διάνυσμα αρχικής κατανομής* ηλικίας. Τα $x_i^{(k)}$ αλλάζουν για τρεις λόγους : *γέννες, θανάτους, γήρανση*. Το πρόβλημα είναι να προβλέψουμε μετά από αρκετό καιρό την κατανομή της ηλικίας.

Μελετάμε το μοντέλο σε διακριτό χρόνο $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ ώστε

$$t_0 = 0, t_1 = L/n, t_2 = 2L/n, \dots, t_k = kL/n.$$

α) Γεννήσεις

Το a_i θα συμβολίζει τον μέσο όρο αριθμού των θηλυκών απογόνων που γεννούνται από ένα θηλυκό οργανισμό που ανήκει στην i κλάση.

Κάθε κλάση για την οποία η αντίστοιχη τιμή είναι θετική καλείται *κλάση γονιμοποίησης*.

β) Θάνατοι

Το b_i θα συμβολίζει το μέρος των γυναικών στην i κλάση που αναμένεται να επιζήσουν.

Προφανώς πρέπει να ισχύει ότι $a_i \geq 0$, $1 \geq b_i > 0$ και $b_n = 0$.

Έστω $x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$ να είναι το διάνυσμα κατανομής στη χρονική

περίοδο $[t_k, t_{k+1})$. Δηλαδή το $x_i^{(k)}$ να εκφράζει τον αριθμό θηλυκών στην i κλάση την περίοδο t_k .

Σκοπός μας είναι να μελετήσουμε πως διαμορφώνεται αυτό το διάνυσμα στο χρόνο. Ας αρχίσουμε από τα μικρότερα σε ηλικία μέλη του πληθυσμού, δηλαδή αυτά που ανήκουν στο διάστημα $[0, L/n)$.

Το $x_1^{(k)}$ εκφράζει τον αριθμό θηλυκών που γεννήθηκαν μεταξύ t_{k-1} και t_k . Άρα θα δίνεται από την εξής ποσότητα :

$$x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \dots + a_n x_n^{(k-1)}.$$

Ο αριθμός των θηλυκών στην $(i + 1)$ κλάση στην περίοδο $[t_k, t_{k+1})$ είναι αυτά που ήταν στην κλάση i στην περίοδο $[t_{k-1}, t_k)$ και είναι ακόμη εν ζωή :

$$x_{i+1}^{(k)} = b_i x_i^{(k-1)}, \quad i = 1, \dots, n - 1$$

Μπορούμε να περιγράψουμε όλες τις προηγούμενες πληροφορίες υπό μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{pmatrix}.$$

Ο προηγούμενος πίνακας καλείται **πίνακας του Leslie** και η κατανομή του πληθυσμού δίνεται ως ακολούθως.

$$x^{(k)} = Lx^{(k-1)} = L^k x^{(0)}.$$

Παράδειγμα 80 Σε ένα πληθυσμό ζώων η μεγαλύτερη ηλικία για τα θήλυκα είναι 15 χρόνια και χωρίζεται σε τρεις ίσες κλάσεις. Αν ο πίνακας του Leslie είναι

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

και η αρχική κατανομή $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1000$. Να βρεθεί η κατανομή του πληθυσμού μετά 15 χρόνια.

Λύση 81 $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$, σε 5 χρόνια $x^{(1)} = Lx^{(0)} = \begin{pmatrix} 7000 \\ 500 \\ 250 \end{pmatrix}$, σε 10 χρόνια $x^{(2)} = Lx^{(1)} = \begin{pmatrix} 2750 \\ 3500 \\ 125 \end{pmatrix}$, σε 15 χρόνια $x^{(3)} = Lx^{(2)} = \begin{pmatrix} 14375 \\ 1375 \\ 875 \end{pmatrix}$.

9.2 Εξέλιξη Πληθυσμού

Θα μελετήσουμε στη συνέχεια τη συμπεριφορά της κατανομής στο χρόνο. Η συμπεριφορά αυτή σχετίζεται με τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα του Leslie. Θα εξετάσουμε λοιπόν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα Leslie.

$$\rho(\lambda) = |\lambda I - L| = \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - (a_2 b_1) \lambda^{n-2} - (a_3 b_1 b_2) \lambda^{n-3} - \dots - (a_n b_1 \dots b_{n-1})$$

Για τις ιδιοτιμές λ_i ισχύει $\rho(\lambda_i) = 0$.

Έστω το πολυώνυμο

$$q(\lambda) = 1 - \frac{\rho(\lambda)}{\lambda^n}, \lambda \neq 0$$

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \dots + \frac{a_n b_1 \cdots b_{n-1}}{\lambda^n}$$

Επειδή $a_i, b_i \geq 0$, αν $\lambda > 0$, τότε η συνάρτηση $q(\lambda)$ είναι φθίνουσα και $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} q(\lambda) = 0$ για $\lambda \rightarrow \infty$. Επίσης, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} q(\lambda) = \infty$ για $\lambda \rightarrow 0$. Επίσης η πρώτη παράγωγος δεν μηδενίζεται και $q'(\lambda_1) < 0$. Άρα $\exists \lambda_1$, ώστε $q(\lambda_1) = 1$. Δηλαδή η ρίζα λ_1 είναι ιδιοτιμή του πίνακα Leslie. Αν η λ_1 δεν ήταν απλή ρίζα, τότε $q'(\lambda_1) = 0$ το οποίο είναι αδύνατο.

Έστω u_1 ένα ιδιοδιάνυσμα της λ_1 . Τότε

$$Lu_1 = \lambda_1 u_1 \Leftrightarrow (\lambda_1 I - L)u_1 = \bar{0}$$

και το ομογενές σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση. Μία από αυτές τις λύσεις είναι η

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_1 b_2/\lambda_1^2 \\ \vdots \\ b_1 \cdots b_{n-1}/\lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Κάθε άλλη λύση είναι πολλαπλάσιο του u_1 .

Έχουμε αποδείξει λοιπόν το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 82 Ένας πίνακας Leslie έχει μοναδική θετική ιδιοτιμή λ_1 και ένα ιδιοδιάνυσμα της u_1 έχει όλες τις συντεταγμένες του θετικές.

Το επόμενο θεώρημα παίζει βασικό ρόλο στα μοντέλα Leslie διότι αποδεικνύει ότι η προηγούμενη ιδιοτιμή είναι η κυριαρχούσα.

Θεώρημα 83 Αν λ_1 είναι η μοναδική θετική ιδιοτιμή του L και λ_i είναι οποιαδήποτε άλλη πραγματική ή μιγαδική τότε $\lambda_1 \geq |\lambda_i|$.

Απόδειξη. Έστω το πολυώνυμο $q(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2} + \dots + c_n x^{-n}$, με πραγματικούς θετικούς συντελεστές c_i , για το οποίο ισχύει ότι $q(\lambda_i) = 1$ όπως προηγουμένως. Ας υποθέσουμε ότι $n = 2m$. Έστω

$$O(x) = c_1 x^{-1} + c_3 x^{-3} + \dots + c_{2m-1} x^{-2m+1}$$

και

$$E(x) = c_2 x^{-2} + c_4 x^{-4} + \dots + c_{2m} x^{-2m}.$$

Τότε $q(x) = O(x) + E(x)$ και έστω ότι η μεταβλητή x λαμβάνει αρνητικές τιμές, $x < 0$. Ισχύει ότι $E(\lambda_1) = E(-\lambda_1) < 1$ και $O(-\lambda_1) + E(-\lambda_1) < 1$. Άρα η τιμή $-\lambda_1$ δεν είναι ιδιοτιμή. Ενώ $q(x) \rightarrow \infty$ όταν $x \rightarrow 0^-$. Έχουμε λοιπόν ότι $\exists x_0$ ώστε $O(x_0) + E(x_0) = 1$ για $-\lambda_1 < x_0 < 0$. Έστω ότι $x_1 < -\lambda_1$. Τότε $E(x_1) < E(-\lambda_1)$ και $O(x_1) > O(-\lambda_1)$. Άρα $-O(x_1) < -O(-\lambda_1)$. Τελικά

$$-O(x_1) + E(x_1) < -O(-\lambda_1) + E(-\lambda_1) = O(\lambda_1) + E(\lambda_1) = 1$$

και $O(x_1) + E(x_1) < -O(x_1) + E(x_1) < 1$.

Αν $\exists x_0$ ώστε $x_0 < 0$ και $q(x_0) = 1$, τότε πρέπει $-\lambda_1 < x_0 < 0$. Δηλαδή $|x_0| < \lambda_1$. Έστω τώρα $\lambda_1 \in \mathbf{C}$ και $q(\lambda_i) = 1$. Έστω $\lambda_i = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, τότε

$$\begin{aligned} q(\lambda_i) &= \frac{c_1}{r} \cos \theta + \frac{c_2}{r^2} \cos 2\theta + \dots + \frac{c_n}{r^n} \cos n\theta - \\ i \left(\frac{c_1}{r} \sin \theta + \frac{c_2}{r^2} \sin 2\theta + \dots + \frac{c_n}{r^n} \sin n\theta \right) &= 1 \end{aligned}$$

και $\frac{c_1}{\lambda_1} + \dots + \frac{c_n}{\lambda_1^n} = 1$. Άρα

$$c_1 \left(\frac{1}{r} \cos \theta - \frac{1}{\lambda_1} \right) + \dots + c_n \left(\frac{1}{r^n} \cos n\theta - \frac{1}{\lambda_1^n} \right) = 0.$$

Αν $\lambda_1 < r$ τότε και η προηγούμενη ισότητα θα ήταν λάθος. Άρα $\lambda_1 \geq r = |\lambda_i|$.

■

Παράδειγμα 84 Έστω ότι ο πίνακας Leslie ενός πληθυσμού είναι

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του L είναι $\lambda^3 - 1$. Άρα $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Προφανώς $|\lambda_i| = 1$ και μια από αυτές είναι θετική. Για αυτόν τον πίνακα ισχύει ότι $L^3 = I$ δηλαδή

$$x^{(0)} = x^{(3)} = x^{(6)} = \dots = x^{(k)} = \dots$$

Το διάνυσμα κατανομής πληθυσμού σ' αυτή την περίπτωση είναι περιοδικό με περίοδο 3 κλάσεις.

Πρόβλημα 85 Πότε $|\lambda_i| < \lambda_1$ για όλες τις μη θετικές ή μιγαδικές ιδιοτιμές ενός πίνακα Leslie;

Το επόμενο θεώρημα το οποίο δίνεται χωρίς απόδειξη απαντά στο πρόβλημα αυτό.

Θεώρημα 86 Αν δύο διαδοχικές τιμές a_i και a_{i+1} της πρώτης γραμμής ενός πίνακα Leslie είναι μη-μηδενικές, τότε ισχύει ότι $\lambda_1 > |\lambda_i|$ για λ_1 θετική ιδιοτιμή και λ_i οποιαδήποτε άλλη.

Έστω ότι ο L ικανοποιεί τη συνθήκη του προηγούμενου θεωρήματος και είναι διαγωνοποιήσιμος. Έστω οι ιδιοτιμές του L να είναι $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, με $\lambda_1 > 0$ και λ_i όχι απαραίτητα όλες διαφορετικές. Έστω P ο πίνακας που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα v_1, \dots, v_n . Τότε ισχύει ότι

$$L = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \text{ και } L^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Άρα

$$L^k x^{(0)} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} x^{(0)} \text{ και } x^{(k)} = L^k x^{(0)}$$

$$\left(\frac{1}{\lambda_1^k}\right) x^{(k)} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \end{pmatrix} P^{-1} x^{(0)}.$$

Επειδή $|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}| < 1$ ισχύει ότι $(\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^k \rightarrow 0$. Δηλαδή

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda_1^k}\right) x^{(k)} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} x^{(0)}.$$

Έστω η πρώτη συντεταγμένη του $P^{-1} x^{(0)}$ να είναι ο αριθμός c . Επίσης

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (v_1, 0, \dots, 0)$$

όπου v_1 είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της λ_1 . Τότε $P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} x^{(0)} = c v_1$.

Άρα

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda_1^k}\right) x^{(k)} = c v_1.$$

Εδώ $c = c_{11}x_1^{(0)} + c_{12}x_2^{(0)} + \dots + c_{1n}x_n^{(0)}$.

Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι $x^{(k)} \approx c\lambda_1^k v_1$ και αυτή είναι μία καλή προσέγγιση της κατανομής. Επίσης κάθε κατανομή θα είναι πολλαπλάσιο της προηγούμενης με λ_1 . Άρα η αναλογία των θηλυκών σε κάθε κλάση σταθεροποιείται.

Παράδειγμα 87 Έστω $L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$ ο πίνακας Leslie κάποιου πληθυσμού. Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &= \lambda^3 - 2\lambda - 3/8 = \lambda^3 - (3/2)^3 - 2\lambda + 3 \\ &= (\lambda - 3/2)(\lambda^2 + 3\lambda/2 + 9/4) - 2(\lambda - 3/2) \\ &= (\lambda - 3/2)(\lambda^2 + 3\lambda/2 + 1/4). \end{aligned}$$

Η κυρίαρχουσα ιδιοτιμή του L είναι $3/2$ και ένα ιδιοδιάνυσμά της:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή $x^{(k)} \approx 3x^{(k-1)}/2$ και κάθε 5 χρόνια ο αριθμός των θηλυκών θα αυξάνει με ρυθμό 50%:

$$x^{(k)} \approx c(3/2)^k \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} \end{pmatrix}.$$

Η κατανομή θα γίνει $1 : 1/3 : 1/18$ για όλες τις ηλικίες. Δηλαδή 72% στην πρώτη κλάση, 24% στη δεύτερη, 4% στην τρίτη.

Σχόλιο 88 Από την σχέση $x^{(k)} \approx c\lambda_1^k u_1$ έχουμε ότι

- i) Αν $\lambda_1 > 1$, τότε ο πληθυσμός αυξάνει.
- ii) Αν $\lambda_1 = 1$, τότε ο πληθυσμός σταθεροποιείται.
- iii) Αν $\lambda_1 < 1$, τότε ο πληθυσμός ελαττώνεται.

Η περίπτωση $\lambda_1 = 1$ είναι ενδιαφέρουσα γιατί αντιστοιχεί σε μηδενική αύξηση πληθυσμού. Τότε ισχύει ότι

$$1^n - a_1 1^{n-1} - a_2 b_1 1^{n-1} - \dots - a_n b_1 \dots b_{n-1} = 0 \quad \text{ή} \quad a_1 + a_2 b_1 + \dots + a_n b_1 \dots b_{n-1} = 1$$

Σημειώνουμε ότι το πόσο γρήγορα συγκλίνει ο πίνακας εξαρτάται από τη διαφορά μεταξύ των απόλυτων τιμών των δύο μεγαλύτερων ιδιοτιμών.

9.3 Το μοντέλο συγκομιδής

Στο επόμενο μέρος της ενότητας θα ασχοληθούμε με τη συγκομιδή ζώων ενός μοντέλου Leslie. Συγκομιδή σημαίνει αφαίρεση ζώων από τον πληθυσμό για διάφορους λόγους.

Υποθέσεις . Η αφαίρεση γίνεται περιοδικά και ισχύει ότι ο αριθμός των ζώων που παραμένουν είναι ο ίδιος καθώς επίσης και η κατανομή του πληθυσμού.

$$\begin{array}{ccc} \text{IIII} & \xrightarrow{\text{ΑΝΑΠΤΥΞΗ}} & \text{IIIIIII} \\ & \swarrow & \searrow \\ & \text{III} & \end{array}$$

ΣΥΓΚΟΜΙΔΗ

Υποθέτουμε ότι η κατανομή περιγράφεται από ένα πίνακα Leslie και στο τέλος κάθε μιας χρονικής περιόδου κάποιο ποσοστό του πληθυσμού αφαιρείται.

Έστω $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ να είναι η κατανομή. Δηλαδή x_i είναι ο αριθμός των θηλυκών στην i περίοδο (κλάση) ο οποίος μένει αμετάβλητος (δεν υπάρχει αφαίρεση).

Το σύνολο του πληθυσμού (η κατανομή του πληθυσμού) κατά το τέλος της περιόδου και πριν την συγκομιδή δίνεται από Lx . Έστω h_i το μέρος των θηλυκών της i κλάσης τα οποία αφαιρούνται: $1 \geq h_i \geq 0$.

Έστω H ο επόμενος διαγώνιος πίνακας ο οποίος καλείται *πίνακας συγκομιδής*

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_n \end{pmatrix}$$

Το διάνυσμα $HLx = (h_1(Lx)_1, \dots, h_n(Lx)_n)^t$ δίνει τον αριθμό των θηλυκών τα οποία αφαιρέθηκαν. Εδώ $(Lx)_i$ είναι η i συντεταγμένη του διανύσματος Lx .

Ισχύει εξ υποθέσεως ότι

$$Lx - HLx = x \Leftrightarrow (I - H)Lx = x$$

Δηλαδή το x πρέπει να είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $(I - H)L$ το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1. Ας μελετήσουμε τώρα τον προηγούμενο πίνακα :

$$(I - H)L = \begin{vmatrix} (1 - h_1)a_1 & (1 - h_1)a_2 & 0 & \cdots & (1 - h_1)a_n \\ (1 - h_2)b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (1 - h_3)b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (1 - h_n)b_{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

Δηλαδή ο $(I - H)L$ έχει τη μορφή πίνακα Leslie. Το 1 είναι ιδιοτιμή του προηγούμενου πίνακα και άρα σύμφωνα με την παρατήρηση που κάναμε στο τέλος του προηγούμενου μοντέλου έχουμε:

$$(1 - h_1)[a_1 + a_2 b_1(1 - h_2) + a_3 b_1 b_2(1 - h_2)(1 - h_3) + \dots + a_n b_1 \dots b_{n-1}(1 - h_2) \dots (1 - h_n)] = 1.$$

Αυτή η εξίσωση εκφράζει περιορισμούς μεταξύ των μερών συγκομιδής h_i .

Επειδή το 1 είναι η μοναδική θετική ιδιοτιμή του πίνακα $(I - H)L$, υπάρχει μόνο ένα γραμμικώς ανεξάρτητο διάνυσμα x το οποίο ικανοποιεί την $(I - H)Lx = x$. Όπως και στην αρχή της ενότητας μπορούμε να πάρουμε για u_1 το επόμενο:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1(1 - h_2) \\ b_1 b_2(1 - h_2)(1 - h_3) \\ \vdots \\ b_1 \dots b_{n-1}(1 - h_2) \dots (1 - h_n) \end{pmatrix}.$$

Σχόλιο 89 1) Το u_1 μας δίνει την αναλογία των θηλυκών για κάθε κλάση μετά την πρώτη συγκομιδή.

2) Το πρόβλημα είναι τώρα ο συνολικός αριθμός των θηλυκών μετά από κάθε συγκομιδή. Για να τον προσδιορίσουμε λαμβάνουμε υπόψη μας διάφορες συνθήκες όπως οικολογικές ή οικονομικές.

9.4 Ομοιόμορφη Συγκομιδή

Επειδή μερικά είδη είναι δύσκολο να αναγνωρισθούν ως προς την ηλικία, υποθέτουμε ότι η συγκομιδή γίνεται τυχαία. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ίδιο ποσοστό συγκαταλέγεται από κάθε ηλικία: Δηλαδή $h_i = h$. Οπότε η εξίσωση $(I - H)Lx = x$ γίνεται $Lx = (\frac{1}{1-h})x$ και η ιδιοτιμή είναι $\lambda_1 = 1/(1 - h)$. Δηλαδή $h = 1 - \frac{1}{\lambda_1}$ και $h < 1$. Το διάνυσμα κατανομής s αυτήν την περίπτωση γίνεται

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_1 b_2/\lambda_1^2 \\ \vdots \\ b_1 \dots b_{n-1}/\lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Όσο μεγαλώνει το λ_1 τόσο μεγαλώνει η συγκομιδή. Θα πρέπει $\lambda_1 > 1$ ώστε $h \in (0, 1]$. Δηλαδή ο πληθυσμός θα πρέπει να αυξάνει.

Παράδειγμα 90 Τα αρνάκια Νέας Ζηλανδίας ζουν 12 χρόνια και παίρνουμε σαν περίοδο ανάπτυξης ένα χρόνο. Έχει βρεθεί ότι η κατανομή ηλικίας δίνεται από τον επόμενο πίνακα Leslie (εδώ δίνεται η αναλογία επί τοις χιλίοις):

$$1000L = \begin{pmatrix} 0 & 045 & 391 & 472 & 484 & 546 & 543 & 502 & 468 & 459 & 433 & 421 \\ 845 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 975 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 965 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 950 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 926 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 895 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 850 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 786 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 691 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 561 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 370 & 0 \end{pmatrix}.$$

Με επαναληπτική μέθοδο βρίσκουμε την ιδιοτιμή λ_1 του L να είναι $\lambda_1 = 1.221$. Υποθέτοντας ότι η συγκομιδή είναι ομοιόμορφη βρίσκουμε ότι το h είναι 0.181 ($h = 1 - 1/\lambda_1$).

Δηλαδή το 18,1% των αρνιών από κάθε ηλικία συγκεντρώνεται κάθε χρόνο. Το διάνυσμα κατανομής μετά από την συγκομιδή είναι ανάλογο του:

$$x_1 = (1, 0.692, 0.552, 0.436, 0.339, 0.257, 0.189, 0.131, 0.084, 0.048, 0.022, 0.007)^t$$

Κάθε άλλο διάνυσμα κατανομής είναι πολλαπλάσιο με αυτό.

9.5 Συγκέντρωση των πιο νέων μελών ενός πληθυσμού

Υποθέτουμε σ' αυτή την περίπτωση ότι μόνο τα πιο νέα θηλυκά είναι οικονομικότερα συμφέροντα για συγκομιδή (όπως στα πρόβατα). Δηλαδή

$$h_1 = h \text{ και } h_2 = h_3 = \dots = h_n = 0.$$

Η εξίσωση

$$(1 - h_1)[a_1 + a_2 b_1(1 - h_2) + a_3 b_1 b_2(1 - h_2)(1 - h_3) + \dots + a_n b_1 \dots b_{n-1}(1 - h_2) \dots (1 - h_n)] = 1$$

γίνεται

$$(1 - h)[a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \dots + a_n b_1 \dots b_{n-1}] = 1$$

και $h = 1 - \frac{1}{R}$ όπου $R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \dots + a_n b_1 \dots b_{n-1}$.

Όπως προηγουμένως το διάνυσμα κατανομής μετά από κάθε συγκομιδή είναι ανάλογο του

$$x_i = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_1 b_2 \\ \vdots \\ b_1 \dots b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Θα εφαρμόσουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα στο επόμενο παράδειγμα το οποίο είναι συνέχεια του τελευταίου παραδείγματος με τα αρνάκια Ν. Ζηλανδίας αλλά για το νέο είδος συγκομιδής.

Παράδειγμα 91 Το προηγούμενο παράδειγμα με τα αρνάκια Ν. Ζηλανδίας για αυτή την περίπτωση γίνεται: Το καθαρό ποσοστό αναπαραγωγής είναι $R = 2.513$ και η συγκομιδή $h = 0.602$. Τελικά η αναλογία στην κατανομή έχει ως εξής:

$$x_1 = (1, 0.845, 0.824, 0.795, 0.755, 0.699, 0.626, 0.532, 0.418, 0.289, 0.162, 0.06)^t,$$

$$Lx_1 = (2.513, 0.845, 0.795, 0.755, 0.699, 0.626, 0.532, 0.418, 0.289, 0.162, 0.06)^t.$$

Το Lx_1 είναι το διάνυσμα κατανομής αμέσως πριν τη συγκομιδή. Το άθροισμα των στοιχείων του Lx_1 είναι 8.518 και το πρώτο στοιχείο έχει αναλογία επί του συνόλου 29.5%. Τα νεώτερα αρνιά είναι το 29.5% του πληθυσμού πριν τη συγκομιδή. Επειδή το 60% της πρώτης κλάσης συγκεντρώνεται, το 17.8% του συνόλου συγκεντρώνεται κάθε χρόνο.

9.6 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Κάποιου πληθυσμού ζώων, ο πίνακας Leslie δίνεται ως ακολούθως:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε τη συγκομιδή και την κατανομή πληθυσμού, για την κάθε περίπτωση:

- Χωρίς συγκομιδή,
- Ομοιόμορφη συγκομιδή,
- Αφαιρείται το 50% από τα νεώτερα και το 100% από τα γηραιότερα.

2) Κάποιο είδος σκαθαριών ζει μόνο τρία χρόνια και αναπαράγεται στον τρίτο χρόνο. Η ομάδα του πρώτου έτους επιδιώνει με πιθανότητα $1/2$, του

δευτέρου με $1/3$ ενώ του τρίτου παράγει 6 θηλυκά και πεθαίνει. Αν ο αρχικός πληθυσμός είχε 3000 σκαθάρια σε κάθε ομάδα, δώστε την κατανομή μετά 6 χρόνια και μετά από μεγάλο διάστημα.

3) α) Κάποιο είδος ζει τρία χρόνια και αναπαράγει το δεύτερο και τρίτο χρόνο. Το ποσοστό επιβίωσης είναι $b_1 = 3/4$ και $b_2 = 1/2$, ενώ της αναπαραγωγής $a_2 = 13/3$ και $a_3 = 4$. Αν αρχικά ο πληθυσμός αποτελείται από 10 οργανισμούς στην πρώτη ηλικία μόνο, βρείτε την κατανομή μετά 15 έτη και μετά από n . Κάντε μια μακροχρόνια πρόγνωση.

β) Ας υποθέσουμε ότι αυτό το είδος πρέπει να σταθεροποιηθεί χωρίς να εξαλειφθεί ούτε να υπερπολλαπλασιασθεί. Μπορούμε να το επιτύχουμε αυτό και πώς;

Κεφάλαιο 10

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΓΕΝΕΤΙΚΗ

Η γενετική είναι κλάδος της βιολογίας που ασχολείται με την κληρονομικότητα. Συγκεκριμένα μελετά γονίδια τα οποία καθορίζουν χαρακτηριστικά οργανισμών που κληρονομούνται από τους γονείς. Η κληρονομικότητα χαρακτηριστικών όπως φύλο, ύψος, χρώμα ματιών και μαλλιών στους ανθρώπους, και χαρακτηριστικών όπως χρώμα λουλουδιών και σχήμα φύλλων στα φυτά δίνουν πληροφορίες για τις κληρονομικές αρρώστιες και γι' αυτό ο ρόλος τους είναι σημαντικός και στην ιατρική.

Θα μελετήσουμε την κληρονομικότητα διαφόρων χαρακτηριστικών (χρώμα ματιών, ασθενειών) στα ζώα και στα φυτά. Υποθέτουμε ότι το κληρονομούμενο χαρακτηριστικό ελέγχεται από ένα σύνολο δύο γονιδίων τα οποία καθορίζονται με τα γράμματα A και B. Με την αυτοσωματική κληρονομικότητα κάθε οργανισμός παίρνει δύο από αυτά τα γονίδια AA ή AB ή BB. Αυτό το ζεύγος καλείται η γονιδιοτυπία του οργανισμού και καθορίζει πως τα χαρακτηριστικά που ελέγχονται από τα γονίδια προδηλώνονται στον οργανισμό. Π.χ. σε κάποιο συγκεκριμένο φυτό η γονιδιοτυπία καθορίζει το χρώμα των λουλουδιών του, AA κόκκινο, AB ροζ, BB λευκό. Στους ανθρώπους το χρώμα των ματιών επίσης καθορίζεται από την γονιδιοτυπία : AA και AB καστανά, BB γαλάζια. Σ' αυτήν την περίπτωση λέμε ότι το γονίδιο A κυριαρχεί στο B, επειδή AA και AB ταυτίζονται. Ένας οργανισμός καλείται κυρίαρχος αν έχει τύπο AA, υβριδικός για AB, και λανθάνων για BB. Εκτός από την αυτοσωματική κληρονομικότητα υπάρχει η επονομαζόμενη X-κληρονομικότητα. Σ' αυτό το είδος το αρσενικό κατέχει ένα από τα δύο γονίδια A ή B και το θηλυκό κατέχει ζεύγος γονιδίων (AA, AB ή BB). Στους ανθρώπους η αχρωματοψία, η φαλακρότητα, η ομοφυλία, η σπαστικότητα (όπως και άλλες ασθένειες) εξαρτώνται από την X-κληρονομικότητα.

Σ' αυτό το μοντέλο θα μελετήσουμε λοιπόν τον τρόπο με τον οποίο οι γονείς μεταφέρουν στα παιδιά τους τα γονίδια για τα δύο είδη κληρονομικότητας.

10.1 Αυτοσωματική κληρονομικότητα

Κάθε οργανισμός κληρονομεί από ένα γονίδιο από το ζεύγος των γονιδίων κάθε ενός από τους γονείς του και δημιουργεί το δικό του ζεύγος. Από ότι ξέρουμε είναι τυχαίο ποιο γονίδιο θα μεταβιβάσει ο γονέας στο παιδί του. Δηλαδή αν ο γονέας είναι AB το παιδί θα πάρει το A ή το B με την ίδια πιθανότητα. Αν ο ένας γονέας είναι BB και ο άλλος AB το παιδί σίγουρα θα πάρει το B από τον πρώτο και το A ή το B από τον δεύτερο. Άρα το παιδί έχει την ίδια πιθανότητα να είναι BA ή BB. Ο επόμενος πίνακας δίνει όλες τις πιθανές επιλογές και τις αντίστοιχες πιθανότητες.

	(AA, AA)	(AA, AB)	(AA, BB)	(AB, AB)	(AB, BB)	(BB, BB)
AA	1	1/2	0	1/4	0	0
AB	0	1/2	1	1/2	1/2	0
BB	0	0	0	1/4	1/2	1

Παράδειγμα 92 Ένας γεωπόνος έχει ένα μεγάλο αριθμό φυτών τα οποία αποτελούνται από όλους τους τύπους γονιδίων AA, AB, BB. Θέλει να γονιμοποιεί κάθε υπάρχον φυτό με τον τύπο AA και να βρει την κατανομή των τύπων των γονιδίων του πληθυσμού μετά από πολλές γενιές. (Αυτό γίνεται γιατί ο τύπος AA έχει κάποιο χαρακτηριστικό που θέλουμε να επικρατήσει.)

Έστω $n = 0, 1, 2, \dots$ ο αριθμός της γενιάς. Το $n = 0$ δηλώνει την αρχική γενιά.

Έστω a_n να δηλώνει το ποσοστό φυτών τύπου AA στη n -στη γενιά. Αντίστοιχα, b_n δηλώνει για το AB, και το c_n για το BB.

Η τριάδα $(a_0, b_0, c_0)^t$ εκφράζει την αρχική κατανομή. Προφανώς $a_n + b_n + c_n = 1$. Η κατανομή του τύπου καθορίζεται για κάθε επόμενη γενιά με την βοήθεια του προηγούμενου πίνακα ο οποίος σ' αυτήν την περίπτωση περιορίζεται στον

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Έστω ο προηγούμενος πίνακας να είναι ο M , (παρατηρήστε ότι μελετάμε ένα μοντέλο Markov). Άρα θα έχουμε:

$$a_n = a_{n-1} + 1/2b_{n-1}$$

$$b_n = c_{n-1} + 1/2b_{n-1}$$

$$c_n = 0.$$

Όλοι οι απόγονοι ενός φυτού τύπου ΑΑ θα είναι επίσης ΑΑ και οι μισοί απόγονοι ενός φυτού τύπου ΑΒ θα είναι επίσης ΑΑ. Δηλαδή ο τύπος ΑΑ θα αυξάνει και ο ΒΒ θα εξαλειφθεί.

Έστω $x^{(n)} = (a_n, b_n, c_n)^t$. Τότε

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)} = \dots = M^n x^{(0)}.$$

Ας υποθέσουμε ότι ο M διαγωνοποιείται : $M = PDP^{-1}$. Ο D αποτελείται από τις ιδιοτιμές του M .

$$M^n = PD^n P^{-1}.$$

Για το συγκεκριμένο παράδειγμα οι ιδιοτιμές του είναι :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1/2, \quad \lambda_3 = 0$$

και τα ιδιοδιανύσματα :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Οπότε

$$x^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - (1/2)^n & 1 - (1/2)^{n-1} \\ 0 & (1/2)^n & (1/2)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (a_0, b_0, c_0)^t$$

με $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

Έχουμε λοιπόν :

$$a_n = 1 - (1/2)^n b_0 - (1/2)^{n-1} c_0 \rightarrow 1$$

$$b_n = (1/2)^n b_0 + (1/2)^{n-1} c_0 \rightarrow 0$$

$$c_n = 0.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ Κάντε το ίδιο αλλά αντί κάθε φυτό να γονιμοποιείται με ΑΑ να γονιμοποιείται με φυτό το οποίο έχει τύπο ίδιο με το δικό του.

10.2 Αυτοσωματικές λανθάνουσες ασθένειες

Υπάρχουν ανθρώπινες ασθένειες που εξαρτώνται από τον τύπο γονιδίων. Αυτές καλούνται γενετικές ασθένειες. Στους ανθρώπους, μεγάλος αριθμός από αυτές, καθορίζονται από την λεγόμενη αυτοσωματική κληρονομικότητα, όπου ένα κανονικό γονίδιο A κυριαρχεί πάνω σε ένα ανώμαλο B . Δηλαδή ο τύπος AA δηλώνει ότι ο οργανισμός δεν προσβάλλεται από την συγκεκριμένη ασθένεια, ο τύπος AB είναι φορέας της ασθένειας και ο BB είναι ασθενής. Μερικές από αυτές τις ασθένειες σχετίζονται με φυλετικές ομάδες ανθρώπων:

Κυστική fibrosis (επικρατεί μεταξύ των Καυκασίων), Δρεπανοκυτταρική αναιμία (μεταξύ των Μαύρων), Ανεμία του Cooley (μεταξύ των λαών της Μασσαχουσέτης), Ασθένεια Tay-Sachs (μεταξύ των Εβραίων της Ανατολικής Ευρώπης).

Πολύ συχνά οι προσβεβλημένοι από τέτοιες ασθένειες πεθαίνουν σε μικρή ηλικία και δεν προλαβαίνουν να κάνουν παιδιά. Οπότε οι ασθενείς προέρχονται από γονείς που είναι φορείς και οι δυο. Σε περιοχές υψηλού κινδύνου, όπως αυτές που περιγράψαμε πιο πάνω, κοινωνικά προγράμματα έχουν σχεδιαστεί ώστε να αποφεύγεται η τεκνοποίηση μεταξύ φορέων. Σκοπός είναι οι γονείς να είναι υγιείς ($AA-AA$) ή μόνο ο ένας να είναι φορέας ($AA-AB$). Οπότε τα παιδιά δεν θα προσβάλλονται από την ασθένεια, αλλά μπορεί να είναι απλώς φορείς. Ας μελετήσουμε λοιπόν αυτό το μοντέλο κατά το οποίο οι γεννήσεις είναι ελεγχόμενες.

Ορίζουμε την n -οστή κατανομή $x_n = (a_n, b_n)$ όπου το a_n εκφράζει την αναλογία πληθυσμού τύπου AA κατά την n -γενεά, και το b_n την αναλογία πληθυσμού τύπου AB κατά την n -γενεά.

Επειδή ο ένας τουλάχιστον γονέας είναι τύπου AA μπορούμε να θεωρήσουμε το μοντέλο ότι καθορίζεται από ένωση πάντα με τύπο AA , όπως στο παράδειγμα της προηγούμενης ενότητας. Άρα

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)} = M^n x^{(0)}$$

Εδώ, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του M και τον διαγωνοποιούμε: $M = PDP^{-1}$, όπου $P = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ και $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Τελικά

$$x^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - (1/2)^n \\ 0 & (1/2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (1/2)^n b_0 \\ (1/2)^n b_0 \end{pmatrix}.$$

Βλέπουμε ότι με τον έλεγχο των γεννήσεων οι φορείς θα ελαττώνονται στο μισό σε κάθε επόμενη γενεά. Δυστυχώς στην πράξη ένα μεγάλο ποσοστό

γονέων είναι και οι δυο φορείς, χωρίς τις περισσότερες φορές να το γνωρίζουν, οπότε η ένωση είναι τυχαία (χωρίς τον κοινωνικό έλεγχο). Το μοντέλο σ' αυτήν την περίπτωση είναι μη-γραμμικό και ξεφεύγει από τις μεθόδους μας. Η λύση του δίνεται με χρήση διαφορικών εξισώσεων:

$$b_n = \frac{b_{n-1}}{1 + \frac{1}{2}b_{n-1}}.$$

Απλώς αναφέρουμε εδώ τα αποτελέσματα των δυο προηγούμενων μοντέλων για την ασθένεια της Ανεμίας των Μαύρων της Αμερικής. Είναι γνωστό ότι το 10% αυτών είναι φορείς. Με την πρώτη μέθοδο οι φορείς θα ελαττώνονται στο μισό σε κάθε γενεά και δεν θα υπάρχουν προσβεβλημένα παιδιά. Με την δεύτερη μέθοδο από 10% οι φορείς θα γίνουν 9.5% στην επόμενη γενεά και 5 στα 2000 μαύρα παιδιά θα προσβάλλονται από την ασθένεια. Δυστυχώς η δεύτερη περίπτωση επικρατεί στην πράξη.

10.3 X-Κληρονομικότητα

Το δεύτερο είδος κληρονομικότητας που αναφέραμε στην αρχή της ενότητας, η X-κληρονομικότητα, καθορίζεται από ένα γονίδιο (A ή B) για τα αρσενικά και δύο γονίδια (AA, AB, ή BB) για τα θηλυκά. Η ονομασία οφείλεται στο ότι αυτά τα γονίδια βρίσκονται στα χ-χρωματοσώματα των κυττάρων του οργανισμού.

Στην αρχαία Αίγυπτο αλλά και σε σύγχρονες περιορισμένες κοινωνικές ομάδες η ενδογαμία εφαρμόζετο για να μην αλλοιώνεται η βασιλική γενεά ή κάποιο συγκεκριμένο χαρακτηριστικό. Σήμερα η ενδογαμία είναι πολύ διαδεδομένη στα ζώα για να διατηρείται αμιγής η ράτσα τους. Θα μελετήσουμε την ενδογαμία σε σχέση με την X-κληρονομικότητα. Ξεκινάμε με ένα τυχαίο ζευγάρι, διασταυρώνουμε ένα ζεύγος απογόνων και συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο. Σκοπός μας είναι να συγκεντρώσουμε πληροφορίες για την πιθανότητα με την οποία θα εμφανίζεται κάθε διαφορετικό ζεύγος μετά από πολλές επαναλήψεις.

Η κληρονομικότητα αυτή καθορίζεται ως εξής: Το αρσενικό λαμβάνει ένα γονίδιο από τα δύο της μητέρας με την ίδια πιθανότητα. Το θηλυκό λαμβάνει ένα από τον πατέρα και ένα από τα δύο της μητέρας με την ίδια πιθανότητα. Υπάρχουν έξι τύποι ζευγαριών:

$$(A, AA) \quad (A, AB) \quad (A, BB) \quad (B, AA) \quad (B, AB) \quad (B, BB).$$

Ο ακόλουθος πίνακας εκφράζει τις πιθανότητες μετάβασης από συγκεκριμένο ζεύγος γονέων σε συγκεκριμένο είδος ζεύγους απογόνων.

		(A, AA)	(A, AB)	(A, BB)	(B, AA)	(B, AB)	(B, BB)
ΠΑΙΔΙΑ	A	1	1/2	0	1	1/2	0
	B	0	1/2	1	0	1/2	1
	AA	1	1/2	0	0	0	0
	AB	0	1/2	1	1	1/2	0
	BB	0	0	0	0	1/2	1

Έστω ότι η μεταβλητή n μετρά τις γενεές.

Θα κατασκευάσουμε ένα πίνακα M ο οποίος θα περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης από ένα συγκεκριμένο ζεύγος αμφιθαλών γονέων σε ένα ζεύγος απογόνων το οποίο θα διασταυρωθεί επίσης. Έστω ότι οι γονείς είναι τύπου (A,AB). Ο αρσενικός απόγονος μπορεί να είναι A ή B με την ίδια πιθανότητα. Το θηλυκό θα πάρει το γονίδιο A από τον πατέρα και A ή B από την μητέρα με την ίδια πιθανότητα. Δηλαδή AA ή AB. Άρα το επόμενο ζεύγος θα είναι ένα από τα επόμενα:

$$(A, AA) \quad (A, AB) \quad (B, AA) \quad (B, AB).$$

Η γραμμή λοιπόν του M που καθορίζεται από το ζεύγος που αρχίσαμε θα έχει τη μορφή:

$$\begin{array}{cccccc} 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ (A, AA) & (A, AB) & (A, BB) & (B, AA) & (B, AB) & (B, BB) \end{array}$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο και για τις άλλες περιπτώσεις ορίζουμε τον πίνακα M^t να είναι ο ακόλουθος:

		(A, AA)	(A, AB)	(A, BB)	(B, AA)	(B, AB)	(B, BB)
Γ	(A, AA)	1	0	0	0	0	0
Ο	(A, AB)	1/4	1/4	0	1/4	1/4	0
N	(A, BB)	0	0	0	0	1	0
E	(B, AA)	0	1	0	0	0	0
I	(B, AB)	0	1/4	1/4	0	1/4	1/4
Σ	(B, BB)	0	0	0	0	0	1

Η μεταβλητή a_n εκφράζει την πιθανότητα ενός αμφιθαλούς ζεύγους που θα ζευγαρώσει να είναι τύπου (A,AA), αντίστοιχα η b_n την πιθανότητα ενός αμφιθαλούς ζεύγους που θα ζευγαρώσει να είναι τύπου (A,AB), η c_n την πιθανότητα ενός αμφιθαλούς ζεύγους που θα ζευγαρώσει να είναι τύπου (A,BB), η d_n την πιθανότητα ενός αμφιθαλούς ζεύγους που θα ζευγαρώσει να είναι τύπου (B,AA), η e_n την πιθανότητα ενός αμφιθαλούς ζεύγους που θα ζευγαρώσει να είναι τύπου (B,AB), και η f_n την πιθανότητα ενός αμφιθαλούς ζεύγους που θα ζευγαρώσει να είναι τύπου (B,BB).

Έστω $x^{(n)} = (a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n)^t$, τότε: $x^{(n)} = Mx^{(n-1)} = M^n x^{(0)}$.

Εδώ το $x^{(0)}$ δίνει τις πιθανότητες του αρχικού ζεύγους. Διαγωνοποιούμε τον M ώστε να βρούμε ευκολότερα τις δυνάμεις του. Οι ιδιοτιμές και τα

ιδιοδιανύσματα του δίνονται ως ακολούθως:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1/2, \lambda_4 = -1/2, \lambda_5 = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}), \lambda_6 = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{5})$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -3 \\ 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) \\ \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{5}) \end{pmatrix}, u_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}) \\ \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{5}) \end{pmatrix}.$$

Άρα $M = PDP^{-1}$. Όπου

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{5}) \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}) \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}) \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{5}) \end{pmatrix},$$

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1/2)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1/2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}))^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\frac{1}{4}(1 - \sqrt{5}))^n \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 1/8 & -1/4 & 1/4 & -1/8 & 0 \\ 0 & -1/24 & -1/12 & 1/12 & 1/24 & 0 \\ 0 & (5 + \sqrt{5})/20 & \sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 & (5 + \sqrt{5})/20 & 0 \\ 0 & (5 - \sqrt{5})/20 & -\sqrt{5}/5 & -\sqrt{5}/5 & (5 - \sqrt{5})/20 & 0 \end{pmatrix}.$$

Απομένει να μελετήσουμε το όριο του $x^{(n)}$ καθώς το n μεγαλώνει πολύ. Ο D^n συγκλίνει στον ακόλουθο πίνακα:

$$D^n \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Και το $x^{(n)}$ συγκλίνει στο ακόλουθο διάνυσμα:

$$x^{(n)} \rightarrow P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}x^{(0)}$$

$$x^{(n)} \rightarrow \begin{pmatrix} a_0 + \frac{2}{3}b_0 + \frac{1}{3}c_0 + \frac{2}{3}d_0 + \frac{1}{3}e_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_0 + \frac{1}{3}b_0 + \frac{2}{3}c_0 + \frac{1}{3}d_0 + \frac{2}{3}e_0 \end{pmatrix}.$$

Οριακά λοιπόν μετά από πολλές γενιές τα αμφιθαλή ζεύγη θα είναι τύπου (A,AA) ή (B,BB), δηλαδή θα επικρατήσουν οι δύο ακραίες καταστάσεις.

Παράδειγμα 93 Ας ξεκινήσουμε με το ζεύγος (A,AB). Δηλαδή $a_0 = c_0 = d_0 = e_0 = f_0 = 0$ και $b_0 = 1$. Τότε $x^n \rightarrow (2/3, 0, 0, 0, 0, 1/3)^t$. Δηλαδή ο τύπος (A,AA) θα επικρατήσει με πιθανότητα $2/3$ και ο τύπος (B,BB) με $1/3$.

10.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Υποθέτουμε ότι στη Χ-κληρονομικότητα η αρχική κατανομή είναι $x^{(0)} = (1/6, \dots, 1/6)$. Βρείτε το $x^{(n)}$ καθώς το n τίνει στο άπειρο.

2) Υποθέτουμε ότι κανένα θηλυκό με γονιδιακό τύπο AB δεν επιζεί. Άρα τα πιθανά ζεύγη είναι

$$(A, AA), (A, BB), (B, AA), (B, BB).$$

Βρείτε τον πίνακα μετάβασης.

Κεφάλαιο 11

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΕΘΟΔΟΥ SIMPLEX

Η επίλυση μεγάλου αριθμού γραμμικών ανισοτήτων αναμφισβήτητα παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση προβλημάτων που υπεισέρχονται σε πολλές επιστήμες. Τελικά, όπως θα δούμε, και αυτά τα συστήματα ανάγονται σε συστήματα γραμμικών εξισώσεων. Ο γραμμικός προγραμματισμός άρχισε να μελετάται σοβαρά από τον George Dantzig το 1940 και έχει εξελιχθεί ραγδαία λόγω των εφαρμογών του στη βιομηχανία και στις επιστήμες. Το κύριο εργαλείο αντιμετώπισης αυτών των προβλημάτων είναι η επαναληπτική μέθοδος Simplex την οποία θα περιγράψουμε πρώτα γεωμετρικά και μετά αλγεβρικά. Η μέθοδος αυτή ανάγεται στην εύρεση του κατάλληλου αναγμένου κλιμακωτού πίνακα του αντίστοιχου συστήματος, πάντα έχοντας υπόψη τη σχέση που πρέπει να μεγιστοποιηθεί.

Η γεωμετρική περιγραφή θα γίνει στις δύο διαστάσεις ώστε ο αναγνώστης να μπορεί εύκολα να έχει οπτική εποπτεία της διαδικασίας. Το υπόβαθρο που χρειάζεται είναι βασικά στοιχεία από τη γραμμική Άλγεβρα. Ούτε διαγωνοποιήσεις, ούτε ορίζουσες, ούτε Ευκλείδειους χώρους.

Ας ξεκινήσουμε με την ανίσωση $x + 2y \geq 4$. Μία ανίσωση διαιρεί το χώρο σε δύο ημιχώρους, σε αυτόν που ικανοποιείται η σχέση και σε αυτόν που δεν ικανοποιείται. Το σύνορο είναι οι λύσεις της αντίστοιχης εξίσωσης $x + 2y = 4$.

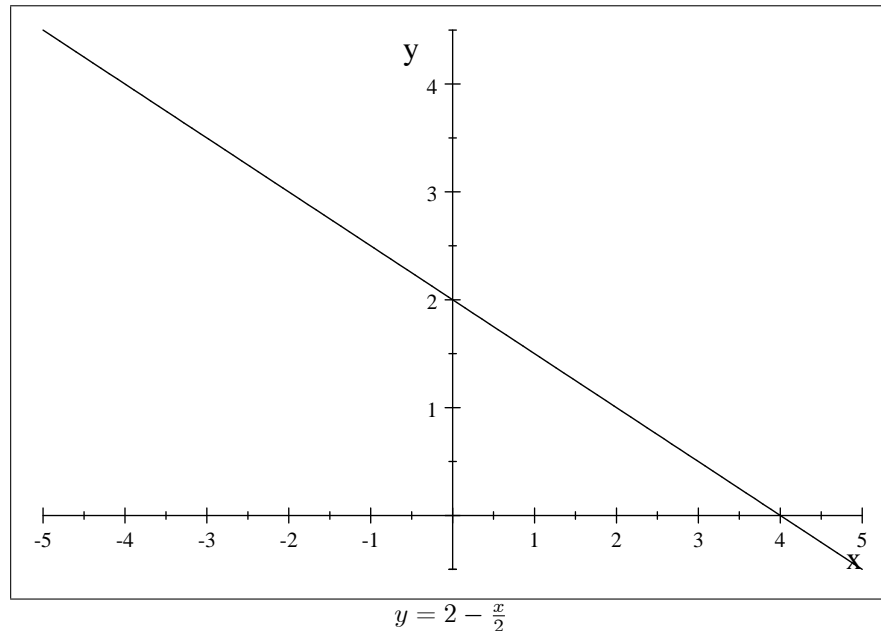
Σε περισσότερες διαστάσεις θα έχουμε την αντίστοιχη σχέση

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

Και σε αυτήν την περίπτωση επικρατεί η ίδια τακτική, δηλαδή το σύνορο των δύο ημιχωρών είναι το υπερεπίπεδο που ορίζεται από την εξίσωση

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

Συνήθως έχουμε και περιορισμούς στις τιμές των αγνώστων όπως $x \geq 0$, $y \geq 0$. Γενικότερα θα έχουμε $x_i \geq c_i$, $i = 1, \dots, n$.

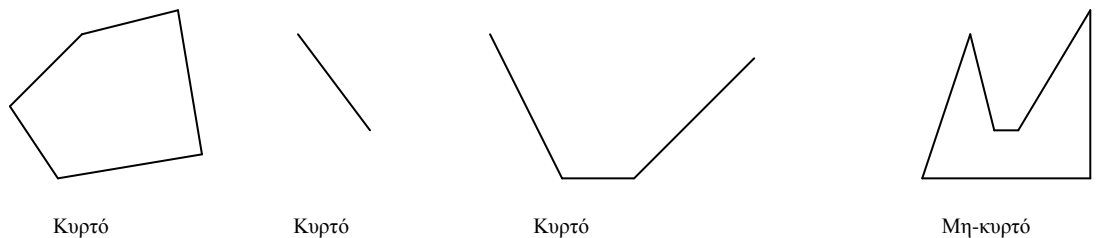
Σχήμα 11.1: $x + 2y = 4$ 

Ορισμός 94 Το σύνολο που περιέχει όλα τα σημεία τα οποία επαληθεύουν όλες τις ανισώσεις καλείται **εφικτό σύνολο**.

Το εφικτό σύνολο εξαρτάται από τους περιορισμούς και μπορεί να είναι φραγμένο, μη-φραγμένο ή και το κενό σύνολο.

Αν το εφικτό σύνολο μπορεί να εγκλειστεί σε έναν κύκλο ή σφαίρα οποιασδήποτε ακτίνας, τότε καλείται **φραγμένο**. Διαφορετικά καλείται μη φραγμένο. Επίσης εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι το εφικτό σύνολο είναι **κυρτό**. Αυτό σημαίνει ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο στοιχεία του εφικτού συνόλου είναι υποσύνολο του.

Σχήμα 11.2: Κυρτό



Αν στο παράδειγμά μας αλλάξουμε τη σχέση $x + 2y \geq 4$ σε $x + 2y \leq 4$ μαζί

με τις άλλες δύο $x \geq 0$ και $y \geq 0$, τότε το εφικτό σύνολο γίνεται το τρίγωνο OAB 11.3.

Εκτός από το σύστημα των γραμμικών ανισοτήτων έχουμε και άλλη μία σχέση, η οποία καλείται **συνάρτηση κόστους** ή **αντικειμενική συνάρτηση**, την οποία θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε ή μεγιστοποιήσουμε μέσα στο εφικτό σύνολο.

Ας είναι στο παράδειγμά μας η συνάρτηση κόστους η επόμενη

$$2x + 3y.$$

Η σχέση $2x + 3y$ ορίζει ευθείες παράλληλες μεταξύ τους με βασική την $2x + 3y = 0$.

Εδώ ζητάμε εκείνη την ευθεία $2x + 3y = d$ η οποία τέμνει το εφικτό σύνολο με το d να είναι ο μικρότερος αριθμός, αν βέβαια ζητάμε ελαχιστοποίηση. Όσο το d μεγαλώνει οι ευθείες κινούνται προς τα δεξιά. Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το B (0,2), η συνάρτηση κόστους ελαχιστοποιείται στο 6.

Αντίστοιχα, βλέπουμε ότι δεν μεγιστοποιείται γιατί το εφικτό σύνολο είναι μη φραγμένο.

Πρόβλημα 95 Βρείτε τιμές x_0 και y_0 οι οποίες μεγιστοποιούν τη συνάρτηση

$$z = c_1x + c_2y$$

και ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y & (\leq) (\geq) (=) b_1 \\ & \vdots \\ a_{m1}x + a_{m2}y & (\leq) (\geq) (=) b_m \\ x & \geq 0, y \geq 0, b_i \geq 0, i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο του εφικτού συνόλου αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό ευθύγραμμων τμημάτων ή και ημιευθειών. Οι τομές αυτών καλούνται **κορυφές** ή **ακραία σημεία**.

Αναφέρουμε το επόμενο θεώρημα από το γραμμικό προγραμματισμό.

Θεώρημα 96 Αν το εφικτό σύνολο είναι φραγμένο και μη κενό, τότε λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο σε κάποια από τα ακραία σημεία. Αν όμως είναι μη φραγμένο, τότε η συνάρτηση κόστους μπορεί να μην λαμβάνει μέγιστο ή ελάχιστο. Αν όμως λαμβάνει τέτοια τιμή, αυτή θα ορίζεται από κάποιο ακραίο σημείο.

Πρόβλημα 97 Να βρείτε τιμές x_1 και x_2 οι οποίες μεγιστοποιούν τη συνάρτηση κόστους

$$z = x_1 + 3x_2$$

και ικανοποιούν τις επόμενες ανισώσεις

$$2x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$x_1 - x_2 \leq 7$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0.$$

Μετατρέποντας τις ανισώσεις σε εξισώσεις βρίσκουμε το εφικτό σύνολο όπως στο επόμενο σχήμα 11.4.

Επειδή το εφικτό σύνολο είναι φραγμένο, η συνάρτηση κόστους θα λαμβάνει και μέγιστο και ελάχιστο σε κάποιες από τις κορυφές του εφικτού συνόλου. Ο επόμενος πίνακας δίνει τις αντίστοιχες τιμές.

$$(x_1, x_2) \quad z = x_1 + 3x_2$$

$$(0, 6) \quad 18$$

$$(3, 6) \quad 21$$

$$(9, 2) \quad 15$$

$$(7, 0) \quad 7$$

$$(0, 0) \quad 0$$

Άρα το σημείο (3,6) δίνει τη μέγιστη τιμή που είναι 21.

11.1 ΓΕΝΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ (Π.Γ.Π.)

Ας μελετήσουμε τώρα το γενικό πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού. Στην πράξη ο αριθμός των ανισοτήτων και μεταβλητών είναι ιδιαίτερα μεγάλος. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα δυσκολίες στην αντιμετώπιση τέτοιων συστημάτων. Οι δυσκολίες αυτές ξεπερνιούνται με τη χρήση της μεθόδου Σιμπλεξ την οποία θα περιγράψουμε και εξηγήσουμε. Για λόγους ευκολίας θα θέσουμε κάποιους περιορισμούς.

Πρόβλημα 98 Να βρεθούν τα x_1, x_2, \dots, x_n που μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν την

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

κάτω από τους περιορισμούς

11.1. ΓΕΝΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ (Π.Γ.Π.)99

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &\approx b_1 \\a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &\approx b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &\approx b_m\end{aligned}$$

όπου το σύμβολο \approx είναι ένα από τα $\leq, =, \geq$.

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Πρόβλημα 99 Να βρεθούν τα x_1, x_2, \dots, x_n που μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν την

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

και $x_i \geq 0$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ και $b_j \geq 0$, για κάθε $j = 1, 2, \dots, m$.

ΤΡΟΠΟΣ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗΣ ΕΝΟΣ ΓΕΝΙΚΟΥ Π.Γ.Π. ΣΤΗΝ ΤΥΠΙΚΗ ΤΟΥ ΜΟΡΦΗ

1) Όταν έχουμε πρόβλημα ελαχιστοποίησης της z τότε ισοδύναμα μεγιστοποιούμε την

$$z' = -z$$

Π.χ. $\min z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \iff \max z' = -2x_1 - 3x_2 + 5x_3$.

2) Αν κάποιος από τους σταθερούς όρους b_j είναι αρνητικός, τότε πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη του αντίστοιχου περιορισμού με -1 .

Π.χ. $x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq -6 \iff -x_1 + 2x_2 - 4x_3 \geq 6$.

3) Αν ένας περιορισμός είναι σε μορφή ανισότητας, τότε ανάγεται σε εξίσωση με την εισαγωγή νέων μη αρνητικών μεταβλητών. Έτσι οι αρχικοί περιορισμοί

$$\begin{aligned}a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n &\leq b_k \\a_{l1}x_1 + \dots + a_{ln}x_n &\geq b_l\end{aligned}$$

είναι ισοδύναμοι με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n + x_r &= b_k, x_r \geq 0 \\ a_{l1}x_1 + \dots + a_{ln}x_n - x_s &= b_l, x_s \geq 0. \end{aligned}$$

4) Αν είναι $x_i \leq 0$ για κάποιο i , τότε θέτουμε $x_i = -x'_i$, όπου $x'_i \geq 0$, ενώ αν είναι $x_i \in \mathbb{R}$ για κάποιο i , τότε θέτουμε $x_i = x'_i - x''_i$, όπου $x'_i \geq 0$ και $x''_i \geq 0$.

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ Π.Γ.Π. ΣΕ ΜΟΡΦΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Το πρόβλημα 99 εκφράζεται σε μορφή πινάκων ως εξής

Να βρεθεί το διάνυσμα x που μεγιστοποιεί την

$$z = c^t x$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$Ax = b, x \geq \bar{0}$$

δηλαδή $x_i \geq 0$ για κάθε i , όπου

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ίσως να υπάρχουν πολλά διανύσματα τα οποία ικανοποιούν την σχέση $Ax = b$, αλλά εμείς θέλουμε εκείνο το διάνυσμα, αν υπάρχει, που να μεγιστοποιεί την z .

Έτσι μπορούμε να διακρίνουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις:

- 1) Το σύστημα $Ax = b$ δεν έχει λύσεις.
- 2) Το σύστημα $Ax = b$ έχει άπειρες λύσεις αλλά η z δεν είναι φραγμένη, δηλαδή μπορεί να μεγαλώνει απεριόριστα.
- 3) Το σύστημα $Ax = b$ έχει λύσεις και μία τουλάχιστον από αυτές μεγιστοποιεί την z .

11.2 ΠΡΟΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ SIMPLEX

Θεωρούμε το σύνολο των περιορισμών ενός ΠΓΠ σε τυπική μορφή, δηλαδή ένα σύστημα m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους $Ax = b$. Για τις εξισώσεις αυτές δεχόμαστε πάντα ότι είναι συμβιβάσιμες, δηλαδή $rank(A) = rank(A, b)$,

αφού αλλιώς το σύστημα, άρα και το ΠΓΠ, δεν έχει λύση. Επιπλέον, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε πάντα ότι $\text{rank}(A) = m < n$. Τότε το σύστημα των περιορισμών $Ax = b$ έχει άπειρες λύσεις και η βέλτιστη λύση θα αναζητηθεί στις μη αρνητικές από αυτές.

Αν $m = n$, τότε το σύστημα $Ax = b$ έχει ακριβώς μία λύση οπότε δεν τίθεται θέμα μεγιστοποίησης της z ενώ αν $m > n$, τότε κάποιοι από τους περιορισμούς είναι περιττοί και μπορούν να παραληφθούν. Αν λοιπόν στο σύστημα των περιορισμών $Ax = b$ του ΠΓΠ έχουμε $\text{rank}(A) = m < n$, θα υπάρχουν πάντα m στήλες του πίνακα A που είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Επιλέγουμε m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα A . Θέτουμε τις $n - m$ μεταβλητές οι οποίες αντιστοιχούν στις εναπομείναντες στήλες ίσες με μηδέν και επιλύουμε ως προς τις υπόλοιπες m μεταβλητές. Η λύση που προκύπτει τότε ονομάζεται **βασική λύση** του ΠΓΠ και οι αντίστοιχες μεταβλητές **βασικές μεταβλητές** ενώ οι υπόλοιπες μεταβλητές ονομάζονται **μη-βασικές μεταβλητές**.

Ο αριθμός των βασικών λύσεων ενός ΠΓΠ είναι το πολύ $\frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Πράγματι, ο αριθμός των βασικών λύσεων του συστήματος των περιορισμών $Ax = b$ ισούται με τον αριθμό των βάσεων που δημιουργούνται από τις στήλες του πίνακα A . Αφού όμως $\text{rank}(A) = m < n$, m από τις n στήλες του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, κι επομένως ο μέγιστος δυνατός αριθμός βάσεων που μπορούν να υπάρξουν είναι ίσος με το πλήθος των n συνδυασμών ανά m , που είναι $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Κάθε βασική λύση με όλες τις μεταβλητές μη αρνητικές ονομάζεται **βασική εφικτή λύση**.

Για να λύσουμε το ΠΓΠ, θεωρητικά θα μπορούσαμε να βρούμε όλες τις βασικές λύσεις, να κρατήσουμε τις βασικές εφικτές λύσεις και να δούμε ποια από αυτές μεγιστοποιεί την z . Στην πράξη όμως αυτό είναι δυνατό μόνο για μικρές τιμές των n και m . Για παράδειγμα, αν $n = 40$ και $m = 20$, οι εφικτές λύσεις ξεπερνούν τις 130 δισεκατομμύρια.

11.3 ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Η μέθοδος Σιμπλεξ είναι μία επαναληπτική μέθοδος με την οποία ξεκινάμε από μια βασική εφικτή λύση του ΠΓΠ και κάθε φορά πηγαίνουμε σε μία άλλη βασική εφικτή λύση που μεγαλώνει την τιμή της z , μέχρι να καταλήξουμε στην βέλτιστη λύση, η οποία μεγιστοποιεί την z .

Θεωρούμε ένα ΠΓΠ στην τυπική του μορφή και θεωρούμε την z ως έναν ακόμη περιορισμό, δηλαδή

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \iff -(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n) + z = 0.$$

Παρακάτω περιγράφονται τα βήματα της μεθόδου αυτής με την βοήθεια ενός παραδείγματος:

Παράδειγμα 100 Να βρεθούν τα x_1, x_2, x_3 που μεγιστοποιούν την

$$z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 15$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 7$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Πριν εφαρμόσουμε την μέθοδο Simplex, φέρνουμε το πρόβλημα στην τυπική του μορφή που είναι η εξής:

Να βρεθούν τα x_1, x_2, x_3 που μεγιστοποιούν την

$$z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 15$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 7$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.$$

1ο βήμα:

Βρίσκουμε μια προφανή βασική εφικτή λύση, την

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 15, x_5 = 7, x_6 = 6,$$

και φτιάχνουμε τον αρχικό πίνακα ως εξής:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z		
3	2	4	1	0	0	0	15	= x_4
1	2	3	0	1	0	0	7	= x_5
2	1	1	0	0	1	0	6	= x_6
-3	-4	-2	0	0	0	1	0	= z .

Σκοπός μας είναι να βρούμε έναν αναγμένο κλιμακωτό πίνακα ο οποίος ταυτόχρονα θα μεγιστοποιεί τη z . Για να το πετύχουμε αυτό θα ακολουθήσουμε μια διαδικασία την οποία θα περιγράψουμε στο το παράδειγμα και εξηγήσουμε μετά το παράδειγμα.

2ο βήμα :

Ελέγχουμε αν η λύση αυτή είναι βέλτιστη ως εξής: *αν όλα τα στοιχεία της τελικής γραμμής είναι μη αρνητικά (εκτός από το τελευταίο δεξιά), τότε η λύση αυτή είναι βέλτιστη.*

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα υπάρχουν αρνητικά στοιχεία στην τελευταία γραμμή οπότε συνεχίζουμε με το επόμενο βήμα.

3ο βήμα :

Για να πάμε από την αρχική βασική εφικτή λύση σε μια καλύτερη, πρέπει μία από τις βασικές μεταβλητές να γίνει μη βασική και μία από τις μη βασικές να γίνει βασική. Η μη βασική μεταβλητή που θα γίνει βασική είναι αυτή της οποίας το στοιχείο της τελευταίας γραμμής είναι το μικρότερο από όλα τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής (εκτός από το τελευταίο δεξιά).

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα το μικρότερο στοιχείο της τελευταίας γραμμής είναι το -4 που αντιστοιχεί στη μεταβλητή x_2 .

Η βασική μεταβλητή που θα γίνει μη βασική βρίσκεται ως εξής: *αδιαφορώντας για την τελευταία γραμμή, παίρνουμε τη στήλη που αντιστοιχεί στην μεταβλητή που θα γίνει βασική, και για κάθε θετικό στοιχείο της στήλης αυτής διαιρούμε το αντίστοιχο στοιχείο της τελευταίας στήλης με το θετικό αυτό στοιχείο.*

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, αδιαφορώντας για την τελευταία γραμμή, παίρνουμε τη δεύτερη στήλη, και επειδή όλα τα στοιχεία της είναι θετικά κάνουμε τις διαιρέσεις: στην πρώτη γραμμή $15/2 = 7.5$, στη δεύτερη γραμμή $7/2 = 3.5$ και στην τρίτη γραμμή $6/1 = 6$.

Από όλα τα πηλίκα των διαιρέσεων κρατάμε το μικρότερο. Η βασική μεταβλητή που αντιστοιχίζεται στην γραμμή που βρίσκεται το στοιχείο αυτό που έδωσε το μικρότερο πηλίκο είναι αυτή που θα γίνει μη βασική.

Το μικρότερο από αυτά στο παράδειγμά μας αντιστοιχεί στην δεύτερη γραμμή οπότε η x_5 θα γίνει μη βασική μεταβλητή.

4ο βήμα :

Κάνοντας γραμμοπράξεις δημιουργούμε μηδενικά σε όλα τα στοιχεία της στήλης η οποία αντιστοιχεί στη μεταβλητή που θα γίνει βασική εκτός από ένα στοιχείο, αυτό της γραμμής που αντιστοιχεί στη μεταβλητή που θα γίνει μη βασική, το οποίο θα είναι ίσο με ένα.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, εκτελούμε τις εξής τέσσερις γραμμοπράξεις:

1. Διαιρούμε τη 2η γραμμή με 2.

2. Πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή με -2 και την προσθέτουμε στην 1η.
 3. Πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή με -1 και την προσθέτουμε στην 3η.
 4. Πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή με 4 και την προσθέτουμε στην 4η.
- Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

$$\begin{array}{cccccccc}
 x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & z & \\
 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 8 = x_4 \\
 1/2 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 7/2 = x_2 \\
 3/2 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 5/2 = x_6 \\
 -1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 14 = z.
 \end{array}$$

Στη συνέχεια επιστρέφουμε στο 2ο βήμα.

Επειδή η τελευταία γραμμή έχει αρνητικό στοιχείο, το -1 , το οποίο βρίσκεται στην 1η στήλη, η μεταβλητή x_1 θα γίνει βασική. Στην πρώτη γραμμή έχουμε $8/2 = 4$, στην δεύτερη $(7/2)/(1/2) = 7$ και στην τρίτη $(5/2)/(3/2) = 5/3$. Το μικρότερο από αυτά είναι το $5/3$ άρα η μεταβλητή x_6 θα γίνει μη βασική.

Για το σκοπό αυτό κάνουμε τις εξής γραμμοπράξεις:

1. Διαιρούμε την 3η γραμμή με $3/2$.
2. Πολλαπλασιάζουμε την 3η γραμμή με -2 και την προσθέτουμε στην 1η.
3. Πολλαπλασιάζουμε την 3η γραμμή με $-1/2$ και την προσθέτουμε στην 2η.
4. Προσθέτουμε την 3η γραμμή στην 4η.

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

$$\begin{array}{cccccccc}
 x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & z & \\
 0 & 0 & 5/3 & 1 & -1/3 & -4/3 & 0 & 14/3 = x_4 \\
 0 & 1 & 5/3 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 & 8/3 = x_2 \\
 1 & 0 & -1/3 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 5/3 = x_1 \\
 0 & 0 & 11/3 & 0 & 5/3 & 2/3 & 1 & 47/3 = z.
 \end{array}$$

Από αυτόν τον πίνακα φαίνεται ότι η βέλτιστη λύση είναι η

$$x_1 = 5/3, x_2 = 8/3, x_3 = 0, x_4 = 14/3, x_5 = 0, x_6 = 0$$

και η μέγιστη τιμή της z είναι

$$z = 47/3.$$

Επειδή στο αρχικό πρόβλημα δεν υπήρχαν οι μεταβλητές x_4, x_5, x_6 , λέμε ότι η βέλτιστη λύση δίνεται όταν

$$x_1 = 5/3, x_2 = 8/3, x_3 = 0.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Αν για την επιλογή της στήλης ή γραμμής που θα δώσει την εισερχόμενη ή εξερχόμενη μεταβλητή αντίστοιχα υπάρχουν περισσότερες από μία δυνατές επιλογές, τότε επιλέγουμε τυχαία μία από αυτές.

2) Αν κατά τη διαδικασία επιλογής της γραμμής από την οποία προκύπτει η εξερχόμενη μεταβλητή κανένα στοιχείο δεν είναι θετικό, τότε αποδεικνύεται ότι η λύση του ΠΓΠ είναι μη φραγμένη, δηλαδή η z μεγαλώνει απεριόριστα.

11.4 ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ SIMPLEX

Ας υποθέσουμε ότι έπειτα από κάποιο αριθμό επαναλήψεων της μεθόδου έχουμε φτάσει στον παρακάτω πίνακα :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 x_1 & \cdots & x_s & \cdots & x_n & z & & & \\
 a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} & 0 & b_1 & = & x_{k_1} \\
 \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{r1} & \cdots & a_{rs} & \cdots & a_{rn} & 0 & b_r & = & x_{k_r} \\
 \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{m1} & \cdots & a_{ms} & \cdots & a_{mn} & 0 & b_m & = & x_{k_m} \\
 c_1 & \cdots & c_s & \cdots & c_n & 1 & w & = & z
 \end{array}$$

όπου οι βασικές μεταβλητές είναι οι x_{k_1}, \dots, x_{k_m} με αντίστοιχες τιμές b_1, \dots, b_m και η τρέχουσα τιμή της z είναι w . Υποθέτουμε ότι η μεταβλητή x_s γίνεται βασική και η x_{k_r} γίνεται μη βασική. Αυτό προϋποθέτει ότι $a_{rs} \neq 0$. Εφαρμόζοντας τις γραμμοπράξεις του 4ου βήματος της μεθόδου Simplex προκύπτει ο εξής πίνακας :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 x_1 & \cdots & x_s & \cdots & x_n & z & & & \\
 a'_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a'_{1n} & 0 & b_1 - a_{11}b_r/a_{rs} & = & x_{k_1} \\
 \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a'_{r1} & \cdots & 1 & \cdots & a'_{rn} & 0 & b_r/a_{rs} & = & x_{k_r} \\
 \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a'_{m1} & \cdots & 0 & \cdots & a'_{mn} & 0 & b_m - a_{ms}b_r/a_{rs} & = & x_{k_m} \\
 c'_1 & \cdots & 0 & \cdots & c'_n & 1 & w - c_s b_r/a_{rs} & = & z
 \end{array}$$

Ας εξετάσουμε την τιμή της εισερχόμενης μεταβλητής x_s . Είναι $x_s = b_r/a_{rs}$.

Επειδή είναι $b_r \geq 0$ (αφού αντιστοιχεί στην τιμή της x_{k_r} η οποία είναι μη αρνητική), για να ικανοποιείται ο περιορισμός $x_s \geq 0$ πρέπει να ισχύει

$a_{rs} > 0$. Γι' αυτό το λόγο στο 3ο βήμα επιλέγουμε μόνο τα θετικά στοιχεία αυτής της στήλης και για κάθε θετικό στοιχείο της στήλης αυτής διαιρούμε το αντίστοιχο στοιχείο της τελευταίας στήλης με το θετικό αυτό στοιχείο.

Οι υπόλοιπες βασικές μεταβλητές έχουν τιμές

$$x_{k_i} = b_i - a_{is}b_r/a_{rs}$$

για $i = 1, 2, \dots, m$ με $i \neq s$. Για να είναι η νέα λύση εφικτή πρέπει $x_{k_i} \geq 0$. Αν για κάποιο i είναι $a_{is} < 0$ τότε για αυτό το i είναι $x_{k_i} \geq 0$ αφού $b_i \geq 0$, $b_r \geq 0$ και $a_{rs} > 0$. Αν όμως για κάποιο i είναι $a_{is} > 0$ τότε πρέπει να ισχύει

$$b_i - a_{is}b_r/a_{rs} \geq 0$$

για να είναι $x_{k_i} \geq 0$. Η σχέση $b_i - a_{is}b_r/a_{rs} \geq 0$ γράφεται και ως

$$b_i - a_{is}b_r/a_{rs} \geq 0 \iff \frac{b_r}{a_{rs}} \leq \frac{b_i}{a_{is}}.$$

Με άλλα λόγια η προηγούμενη σχέση πρέπει να ισχύει για όλα τα i για τα οποία $a_{is} > 0$ προκειμένου ο νέος πίνακας να δώσει μια εφικτή λύση. Γι' αυτό το λόγο επιλέγουμε το μικρότερο από τα πηλίκια που περιγράφονται στο 3ο βήμα της μεθόδου Simplex.

Ας εξετάσουμε τώρα τη νέα τιμή της z . Από w που ήταν έγινε

$$w' = w - c_s b_r/a_{rs}.$$

Επειδή θέλουμε να μεγαλώσουμε την τιμή της z απαιτούμε η τιμή της

$$w' - w = -c_s b_r/a_{rs}.$$

να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερη. Αυτό όμως θα απαιτούσε να συγκρίνουμε τις ποσότητες $-c_s b_r/a_{rs}$ για κάθε δυνατή τιμή των r και s , κάτι που είναι πρακτικά αδύνατο. Αντί γι' αυτό, επιλέγουμε την εισερχόμενη μεταβλητή x_s έτσι ώστε το c_s να είναι όσο το δυνατόν πιο αρνητικό. Αφού $b_r \geq 0$ και $a_{rs} > 0$ έχουμε

$$w' - w = -c_s b_r/a_{rs} \Rightarrow w' - w \geq 0.$$

που σημαίνει ότι η τιμή της z δεν γίνεται μικρότερη. Γι' αυτό το λόγο στο 3ο βήμα της μεθόδου Simplex η μη βασική μεταβλητή που γίνεται βασική είναι αυτή της οποίας το στοιχείο της τελευταίας γραμμής είναι το μικρότερο από όλα τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής (εκτός από το τελευταίο δεξιά).

Η σχέση $w' - w = -c_s b_r/a_{rs}$ συνεπάγεται επίσης ότι αν όλα τα c_i είναι μη αρνητικά, τότε η τιμή της z δεν μπορεί να αυξηθεί άλλο, οπότε έχουμε πετύχει την βέλτιστη λύση που μεγιστοποιεί την z . Γι' αυτό το λόγο στο 2ο βήμα της μεθόδου Simplex λέμε ότι αν όλα τα στοιχεία της τελικής γραμμής είναι μη αρνητικά (εκτός από το τελευταίο δεξιά), τότε η λύση αυτή είναι βέλτιστη.

11.5 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Μεγιστοποιήστε την $z = 2x_1 + x_2 - x_3$ κάτω από τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 &\leq 4 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

2) Μεγιστοποιήστε την $z = 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4$ κάτω από τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 &\leq 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

3) Μεγιστοποιήστε-ελαχιστοποιήστε την $z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4$ κάτω από τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &\leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

3) Μεγιστοποιήστε-ελαχιστοποιήστε την $z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4$ κάτω από τους περιορισμούς

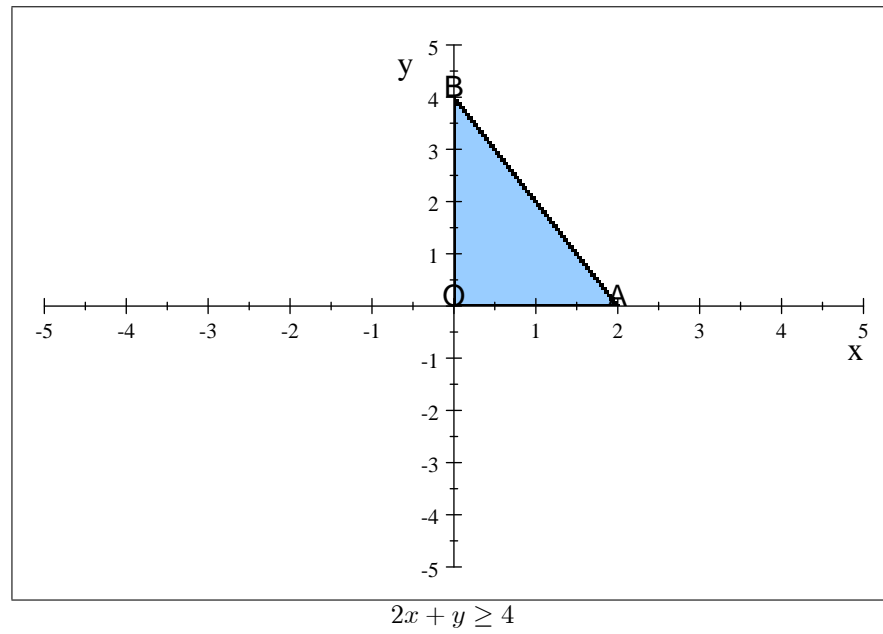
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &\leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

4) Μεγιστοποιήστε την $z = 3x_1 + 2x_2$ με γεωμετρική μέθοδο κάτω από τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 - x_2 &\geq 0 \\ 0 &\leq x_1 \leq 2 \\ 0 &\leq x_2 \leq 1. \end{aligned}$$

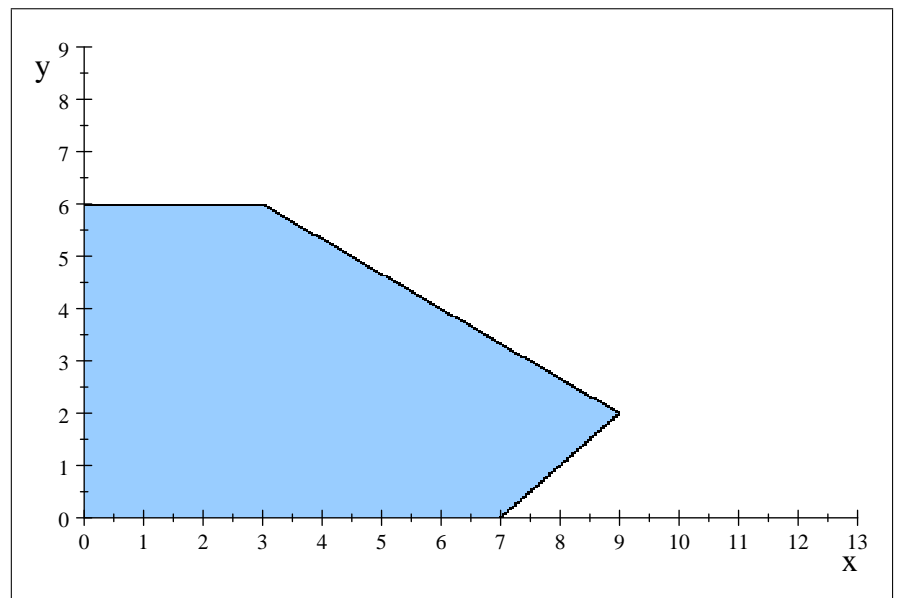
Σχήμα 11.3: $x + 2y \leq 4$

$$[2x + y \leq 4 \quad 0 \leq x \quad 0 \leq y]$$



Σχήμα 11.4: $2x_1 + 3x_2 \leq 24$

$$[2x + 3y \leq 24 \quad y \leq 6 \quad x - y \leq 7]$$



$$2x + 3y \leq 24 \quad y \leq 6 \quad x - y \leq 7$$

Κεφάλαιο 12

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΕΙΡΩΝ FOURIER

12.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Ας υποθέσουμε ότι παραμονές των εκλογών τρεις φίλοι στοιχηματίζουν για τα αποτελέσματα ως εξής:

	<i>A</i>	<i>B</i>	Γ	Δ	<i>E</i>	ΛΟΙΠΟΙ
1 ^{ος}	43%	41%	6%	4%	4%	2%
2 ^{ος}	41%	45%	5%	3%	3%	3%
3 ^{ος}	39%	41%	9%	5%	4%	2%

Αν τα αποτελέσματα έχουν ως ακολούθως ποιος είναι ο νικητής του στοιχήματος:

<i>A</i>	<i>B</i>	Γ	Δ	<i>E</i>	ΛΟΙΠΟΙ
41.5%	40.9%	6.2%	4.8%	3.6%	3%

Κανείς από τους τρεις φίλους δεν έχει κάνει ακριβή πρόβλεψη. Άρα θα πρέπει να βρούμε ποιος έχει κάνει την καλύτερη προσέγγιση και αυτός θα θεωρηθεί νικητής του στοιχήματος.

Κάθε πρόβλεψη u_1, u_2, u_3 μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα στοιχείο του \mathbb{R}^6 . Οπότε το πρόβλημα ανάγεται στο να βρούμε ποιο διάνυσμα είναι πιο κοντά στο $u = (41.5, 40.9, 6.2, 4.8, 3.6, 3)$. Φυσικά αυτό δίνεται από την Ευκλείδεια νόρμα:

$$\|u - v\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_5 - a_5)^2 + (x_6 - a_6)^2}$$

και τώρα πρέπει να βρούμε το i ώστε $\|u - u_j\| \geq \|u - u_i\|$ για $j = 1, 2, 3$.

Το προηγούμενο πρόβλημα είναι μια εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων την οποία θα μελετήσουμε σ' αυτήν την ενότητα. Θα πρέπει

να σημειώσουμε ότι η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων εισήχθη από τον Κ. F. Gauss (και ανεξάρτητα από τον A. Legendre) ο οποίος την χρησιμοποίησε το 1801 για να προσδιορίσει την τροχιά ενός αστεροειδούς. Ας σημειωθεί ότι ο αστεροειδής εξαφανίστηκε πίσω από τον ήλιο και ο Gauss πρόγνωσε ότι θα εμφανιστεί πάλι 10 μήνες αργότερα όπως και έγινε. Ας δούμε ακόμη ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 101 Ο ιδιοκτήτης μιας εταιρείας βρήκε ότι τους πρώτους 5 μήνες του έτους οι πωλήσεις είχαν τις εξής αποδόσεις: 4, 4.4, 5.2, 6.4 και 8 χιλιάδες ευρώ. Βάζοντας τα στοιχεία στο γράφημα πωλήσεων της εταιρείας, υποστηρίζει ότι η καμπύλη πωλήσεων προσεγγίζεται από την καμπύλη ενός τριωνύμου. Εξηγήστε γιατί η πρόβλεψη του είναι σωστή και κάντε πρόγνωση για τις πωλήσεις του τελευταίου μηνός του έτους.

Έστω ότι το ζητούμενο τριώνυμο είναι το $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Πρέπει να υπολογίσουμε τους συντελεστές ώστε το γράφημά του να προσεγγίζει τα σημεία (1, 4), (2, 4.4), (3, 5.2), (4, 6.4) και (5, 8) με τον καλύτερο τρόπο.

Ας αντικαταστήσουμε τα πέντε προηγούμενα σημεία στην $f(x)$ και ας δώσουμε την αντικατάσταση υπό μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4.4 \\ 5.2 \\ 6.4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{ή } y = Mv.$$

Προφανώς μια λύση του προηγούμενου συστήματος θα σήμαινε ότι τα εν λόγω σημεία βρίσκονται επί της καμπύλης το οποίο δεν συμβαίνει απαραίτητα. Θα σκεφτούμε όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα: Θέλουμε ένα διάνυσμα v το οποίο να ελαχιστοποιεί την απόσταση $\|y - Mv\|$. Έστω v^0 ένα τέτοιο διάνυσμα. Το y είναι δεδομένο και το Mv είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στηλών του M . Άρα το Mv βρίσκεται στον υπόχωρο που γεννούν οι στήλες του M και το $y - Mv$ είναι το διάνυσμα που δηλώνει την διαφορά των δύο διανυσμάτων:

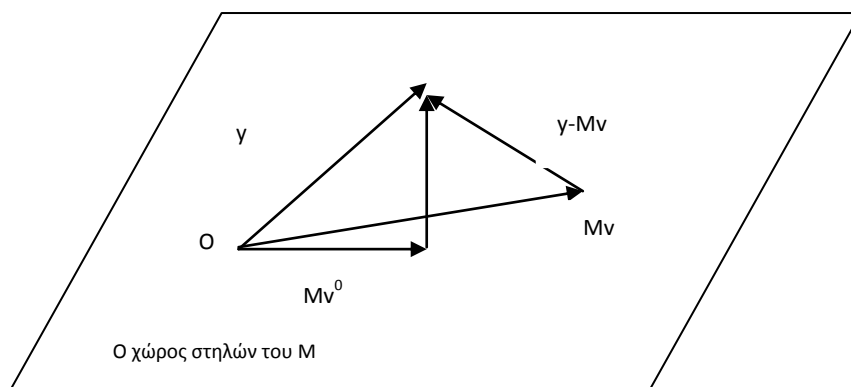
Επειδή το $y - Mv^0$ έχει το μικρότερο μήκος θα είναι κάθετο στο χώρο του M . Δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο Mv και $y - Mv^0$ θα είναι μηδέν.

$$(Mv)^t(y - Mv^0) = \mathbf{0}, \quad \forall v.$$

Άρα $v^t(M^t y - M^t M v^0) = \mathbf{0}, \quad \forall v$. Και αυτό ισχύει όταν

$$(M^t y - M^t M v^0) = \mathbf{0}.$$

Σχήμα 12.1: Προβολή στο χώρο στηλών



Δηλαδή

$$(12.1) \quad M^t y = M^t M v^0.$$

Έστω $M = M^t M$ και ο N είναι ένας 3×3 πίνακας. Άρα αν ο N είναι αντιστρέψιμος, τότε και η εξίσωση 12.1 έχει μοναδική λύση την:

$$v^0 = (M^t M)^{-1} M^t y.$$

Ας εφαρμόσουμε τον προηγούμενο τύπο για την περίπτωση του παραδείγ-

ματός μας:

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \end{pmatrix}, \\
 M^t &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix}, \\
 M^t M &= \begin{pmatrix} 5 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{pmatrix}, (M^t M)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{23}{5} & -\frac{33}{10} & \frac{1}{2} \\ -\frac{33}{10} & \frac{187}{70} & -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{14} \end{pmatrix}, \\
 (M^t M)^{-1} M &= \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{37}{35} & \frac{23}{70} & \frac{6}{7} & \frac{37}{70} & -\frac{23}{35} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{14} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}, \\
 (M^t M)^{-1} M y &= \begin{pmatrix} 4.0 \\ -.2 \\ .2 \end{pmatrix} = v^0.
 \end{aligned}$$

Άρα το τριώνυμο που προσεγγίζει τα πέντε δεδομένα σημεία με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων είναι το $f(x) = 0.2x^2 - 0.2x + 4$ και μια προσέγγιση των κερδών του τελευταίου μήνα του έτους είναι $f(12) = 30.4$ χιλιάδες ευρώ.

Στη γενική περίπτωση όπου θέλουμε να προσεγγίσουμε n σημεία (x_i, y_i) με ένα πολυώνυμο m βαθμού εστω το $f(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$ με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων ακολουθούμε τη μέθοδο του προηγούμενου παραδείγματος. Έστω

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Θεώρημα 102 Το πολυώνυμο m -βαθμού το οποίο προσεγγίζει n σημεία (x_i, y_i) με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων έχει συντελεστές οι οποίοι δίνονται από την σχέση:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (M^t M)^{-1} M y$$

όταν υπάρχει ο πίνακας $(M^t M)^{-1}$.

Άσκηση 103 1) Δείξτε ότι αν M είναι ένας $n \times m$ πίνακας με γραμμικά ανεξάρτητες στήλες, τότε ο $M^t M$ είναι αντιστρέψιμος.

2) Δείξτε ότι ο $n \times (m + 1)$ πίνακας M έχει γραμμικά ανεξάρτητες στήλες αν $n > m$ και τουλάχιστον $m + 1$ από τα σημεία x_1, \dots, x_n είναι διακεκριμένα.

12.2 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΕΙΡΩΝ FOURIER

Αν f είναι μια άγνωστη συνάρτηση της οποίας γνωρίζουμε τις τιμές στα σημεία x_1, \dots, x_n μπορούμε να την προσεγγίσουμε με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων με κάποιο πολυώνυμο (ανάλογα με το σχήμα που δημιουργούν τα σημεία (x_i, y_i)). Έστω τώρα ότι η f είναι δεδομένη και θέλουμε να την προσεγγίσουμε με κάποια συνάρτηση g που είναι γνωστή. Όπως προηγουμένως θα πρέπει η διαφορά $h = f - g$ να ελαχιστοποιηθεί. Ας θεωρήσουμε πάλι τις f και g διανύσματα και ας ζητήσουμε να έχουν την ελάχιστη δυνατή απόσταση ώστε η g να έχει και τις επι πλέον ιδιότητες που απαιτούμε. Για να μιλήσουμε για την απόσταση μεταξύ των εν λόγω διανυσμάτων θα πρέπει πρώτα να καθορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο στον εν λόγω διανυσματικό χώρο. Προφανώς η συνάρτηση f θα πρέπει να είναι τουλάχιστον συνεχής. Ας υπενθυμίσουμε σαυτό το σημείο το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass:

Θεώρημα 104 Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[a, b]$ μπορεί να προσεγγισθεί όσο καλά θέλουμε και μάλιστα ομοιόμορφα με πολυώνυμα.

Έστω λοιπόν $C[a, b]$ ο χώρος των συνεχών απεικονίσεων στο διάστημα $[a, b]$. Το πρόβλημα στους υπολογισμούς μπορεί να εκφρασθεί ως εξής:

Δεδομένου του βαθμού n του πολυωνύμου, υπάρχει πολυώνυμο q το οποίο ικανοποιεί την

$$\|f - p\| \geq \|f - q\|, \forall p \in P_n.$$

Εδώ ζητούμε λύση από έναν πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο, P_n , του $C[a, b]$.

Η έννοια της απόστασης σαυτό το χώρο έρχεται από τη φυσική. Έστω ότι οι f και g εκφράζουν κάποια φυσικά μεγέθη, αφού λοιπόν ζητούμε η διαφορά $h = f - g$ να ελαχιστοποιηθεί, θα πρέπει η ενέργεια που εκφράζει η h να ελαχιστοποιηθεί επίσης. Η ενέργεια όμως της h για τις περισσότερες εφαρμογές δίνεται από

$$\int_a^b [h(t)]^2 dt.$$

Είναι λοιπόν εύλογο να εξετάσουμε αν η παράσταση

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο χώρο $C[a, b]$ το οποίο πράγματι ισχύει.

Ορισμός 105 Ένας διανυσματικός χώρος V καλείται χώρος με εσωτερικό γινόμενο αν υπάρχει συνάρτηση $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{C})$ η οποία ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες:

- 1) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}, \forall u, v \in V,$
- 2) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall u, v, w \in V,$
- 3) $\langle cu, v \rangle = c \langle u, v \rangle, \forall u, v \in V, c \in \mathbf{R}(\mathbf{C}),$
- 4) $\langle u, u \rangle \geq 0, \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \mathbf{0}.$

Σχόλιο 106 Παρατηρούμε εδώ την αναγκαιότητα να είναι οι συναρτήσεις συνεχείς ώστε να ισχύει η τέταρτη ιδιότητα. Επίσης υπενθυμίζουμε ότι με αυτή τη νόρμα ο $C[a, b]$ δεν είναι χώρος Banach.

Μέσα στον απειροδιάστατο διανυσματικό χώρο $C[a, b]$ θα περιοριστούμε σε πεπερασμένους υποχώρους του όπου το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει έχει λύση. Αναφέρουμε το θεώρημα χωρίς απόδειξη: Έστω E ένας νορμαρισμένος χώρος και f, f_1, \dots, f_n τυχαία στοιχεία του. Ζητήται στοιχείο g του υποχώρου $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ που γεννάται από τα προηγούμενα στοιχεία ώστε

$$\|f - g'\| \geq \|f - g\|, \forall g' \in \langle f_1, \dots, f_n \rangle.$$

Θεώρημα 107 Κάθε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος F ενός νορμαρισμένου χώρου E , περιέχει ένα στοιχείο g το οποίο έχει τη μικρότερη απόσταση από ένα δεδομένο στοιχείο f του E .

Ερχόμαστε τώρα στη συνάρτηση g η οποία προσεγγίζει την f , πρέπει να είναι σχετικά απλή και να σχετίζεται με φυσικές έννοιες όταν και η f σχετίζεται αντίστοιχα. Τέτοιου είδους συναρτήσεις είναι τα *τριγωνομετρικά πολυώνυμα τάξης n* :

$$g(t) = c_0 + c_1 + \dots + c_n + d_1 + \dots + d_n$$

Θα πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε τους συντελεστές c_i και d_j ώστε η g να προσεγγίζει την f με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Ας μελετήσουμε πρώτα τα πλεονεκτήματα αυτών των πολυωνύμων.

Έστω W ο υπόχωρος του $C[0, 2\pi]$ ο οποίος γεννάται από $\{\cos nt, \sin nt \mid \text{για κάθε } n \geq 0\}$. Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
 1) \langle \cos nt, \cos mt \rangle &= \begin{cases} 0, n \neq m \\ 1/\pi, n = m > 0 \\ 1/2\pi, n = m = 0 \end{cases} \\
 2) \langle \sin nt, \sin mt \rangle &= \begin{cases} 0, n \neq m \\ 1/\pi, n = m > 0 \end{cases} \\
 3) \langle \cos nt, \sin mt \rangle &= 0, n, m > 0
 \end{aligned}$$

Προφανώς αποδείξαμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 108 Το σύνολο $\{1/\sqrt{2\pi}, 1/\sqrt{\pi}\cos nt, 1/\sqrt{\pi}\sin nt \mid \text{για κάθε } n \geq 0\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του υποχώρου W .

Το αρχικό πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση ενός διανύσματος g από τον W ώστε να ελαχιστοποιείται η ποσότητα $\|f - g\|$. Η απάντηση δίνεται από το επόμενο θεώρημα το οποίο είχαμε αποδείξει για την περίπτωση της προσέγγισης σημείων από συνήθη πολυώνυμο και αποτελεί ειδική περίπτωση ενός γενικότερου θεωρήματος από τη θεωρία των διανυσματικών χώρων με εσωτερικό γινόμενο. Στη συναρτησιακή ανάλυση αυτό το πρόβλημα καλείται το πρόβλημα προσέγγισης του Cebisov.

Θεώρημα 109 Έστω φ ένα διάνυσμα σ' έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο και W_n ένας υπόχωρος διάστασης n ο οποίος γεννιάται από μια ορθοκανονική βάση $\{g_1, \dots, g_n\}$. Το διάνυσμα g του W_n το οποίο ελαχιστοποιεί την απόσταση $\|f - g\|$, $\text{proj}_W(f)$, η προβολή του f στον W_n , και δίνεται από

$$\text{proj}_W(f) = \langle f, g_1 \rangle g_1 + \dots + \langle f, g_n \rangle g_n$$

Απόδειξη. Εφόσον η απόσταση $\|f - g\|$ είναι η μικρότερη δυνατή για κάθε g στον υπόχωρο W_n το g θα είναι η προβολή της f η οποία έχει τη ζητούμενη ιδιότητα όπως στο σχήμα 12.2:

Έστω g_k τυχαίο στοιχείο της βάσης του W_n . Ισχύει ότι

$$\langle f - \text{proj}_W(f), g_k \rangle = 0 \Rightarrow \langle f, g_k \rangle = \langle \text{proj}_W(f), g_k \rangle$$

από την όπου παίρνουμε τη ζητούμενη σχέση. ■

Έστω τώρα

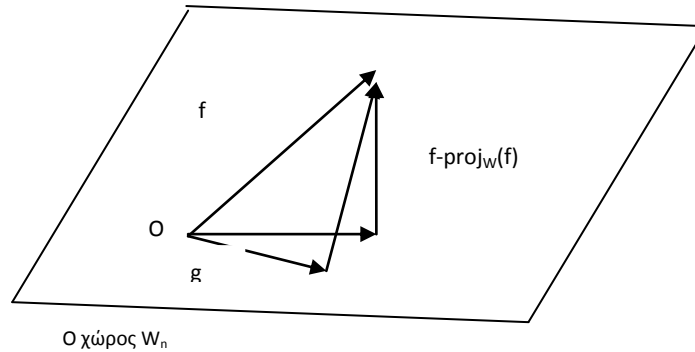
$$W_n = \langle 1/\sqrt{2\pi}, 1/\sqrt{\pi} \cos t, \dots, 1/\sqrt{\pi} \cos nt, 1/\sqrt{\pi} \sin t, \dots, 1/\sqrt{\pi} \sin nt \rangle$$

και εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα στον χώρο $C[0, 2\pi]$.

Θεώρημα 110 Έστω $f(t)$ συνεχής στο $[0, 2\pi]$. Η τριγωνομετρική συνάρτηση $g(t)$ με τύπο $g(t) = 1/2a_0 + a_1 \cos t + \dots + a_n \cos nt + b_1 \sin t + \dots + b_n \sin nt$ η οποία ελαχιστοποιεί την παράσταση

$$\int_0^{2\pi} [f(t) - g(t)]^2 dt$$

Σχήμα 12.2: Προβολή σε υπόχωρο



έχει συντελεστές

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

Απόδειξη. Το θεώρημα είναι άμεση εφαρμογή του προηγούμενου θεωρήματος. ■

Είναι προφανές ότι όσο το n μεγαλώνει τόσο η προσέγγιση γίνεται καλύτερη και μάλιστα η διαφορά $\|f - g\|$ συγκλίνει στο μηδέν καθώς το n προσεγγίζει το άπειρο. Η οριακή αυτή προσέγγιση συμβολίζεται με:

$$g(t) = 1/2a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

και καλείται η **συνάρτηση Fourier** της $f(t)$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Το εύλογο ερώτημα είναι αν η προηγούμενη σειρά συγκλίνει στο $f(t)$ για κάθε t . Δεν θα απαντήσουμε σ' αυτό το ερώτημα το οποίο στη γενικότητά του είναι ιδιαίτερα δύσκολο αλλά απλά θα σημειώσουμε ότι αυτό ισχύει για τις συναρτήσεις που μελετάμε.

Το νόημα της προηγούμενης εξίσωσης είναι ότι η επόμενη εξίσωση

$$\int_0^{2\pi} [f(t) - 1/2a_0 - \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)]^2 dt$$

συγκλίνει στο μηδέν καθώς το n προσεγγίζει το άπειρο.

Εδώ θα πρέπει να προσέξουμε δύο ουσιώδεις έννοιες ισότητας: α) Μια συνάρτηση f ταυτίζεται με τη σειρά Fourier της σαν διανύσματα στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων

$$\int_0^{2\pi} [f(t) - g(t)]^2 dt = 0$$

Μπορεί όμως να ισχύει $f(t_0) \neq g(t_0)$ για κάποιο t_0 .

β) $f(t) = 1/2a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ για κάθε t στο πεδίο ορισμού. Αυτή η έννοια είναι πολύ πιο ισχυρή και δεν ισχύει για κάθε συνεχή συνάρτηση.

Παράδειγμα 111 Έστω ότι ένα ηχητικό κύμα το οποίο είναι περιοδικό δίνεται από τον τύπο

$$p(t) = \frac{2A}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right)$$

μεταξύ 0 και $T = 1/5000$ και στη θέση μηδέν η πίεση είναι η συνήθης ατμοσφαιρική ενώ η μέγιστη τιμή της είναι A . Επίσης η βασική συχνότητα είναι 5000 cps . Επειδή η ανθρώπινη ακοή είναι ένα γραμμικό σύστημα, δηλαδή κάθε πεπλεγμένο ηχητικό κύμα το αναλύει σε πεπερασμένο αριθμό απλών ημιτονοειδών κυμάτων:

$$q(t) = A_0 + A_1 \sin \omega_1(t - \delta_1) + A_2 \sin \omega_2(t - \delta_{12}) + \dots + A_n \sin \omega_n(t - \delta_n)$$

όπου $q(t)$ εκφράζει την πίεση στο τύμπανο, A_0 είναι η συνήθης ατμοσφαιρική πίεση, A_i είναι η μέγιστη πίεση, $\frac{\omega_i}{2\pi}$ η συχνότητα σε κύκλους ανά δευτερόλεπτο και δ_i η διαφορά φάσεως του αντιστοιχού ημιτονοειδούς κύματος, θα προσεγγίσουμε την $p(t)$ με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων χρησιμοποιώντας το αρχικό κομμάτι της αντίστοιχης σειράς Fourier. Έχουμε λοιπόν σύμφωνα με το θεώρημα:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{2A}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right) dt = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{2A}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt = 0, k = 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{2A}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt = \frac{2A}{k\pi}, k = 1, 2, \dots$$

Επειδή το εύρος της ανθρώπινης συχνότητας είναι από 20 έως 20000cps και η συχνότητα δίνεται από $\frac{k}{T}$, αρκεί να περιορίσουμε το k μέχρι και 4. Άρα η προσέγγιση δίνεται από:

$$q(t) = \frac{2A}{\pi} \left[\sin \frac{2\pi}{T}t + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{T}t + \frac{1}{4} \sin \frac{6\pi}{T}t + \frac{1}{6} \sin \frac{8\pi}{T}t \right]$$

Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε τη διαφορά των δυο συναρτήσεων. Προς χάρη απλότητας θέτουμε $A = 1$.

12.3 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Τα έσοδα μιας βιοτεχνίας για τους πέντε πρώτους μήνες κάποιου έτους είναι 4, 4.4, 5.2, 6.4 και 8 χιλιάδες ευρώ. Βρείτε ένα δυνάμιο το οποίο προσεγγίζει τις πιο πάνω τιμές με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και κάντε μια πρόγνωση για τα έσοδα του 12ου μηνός.

2) Βρείτε το τριγωνομετρικό πολυώνυμο τάξης n το οποίο προσεγγίζει με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων τη συνάρτηση

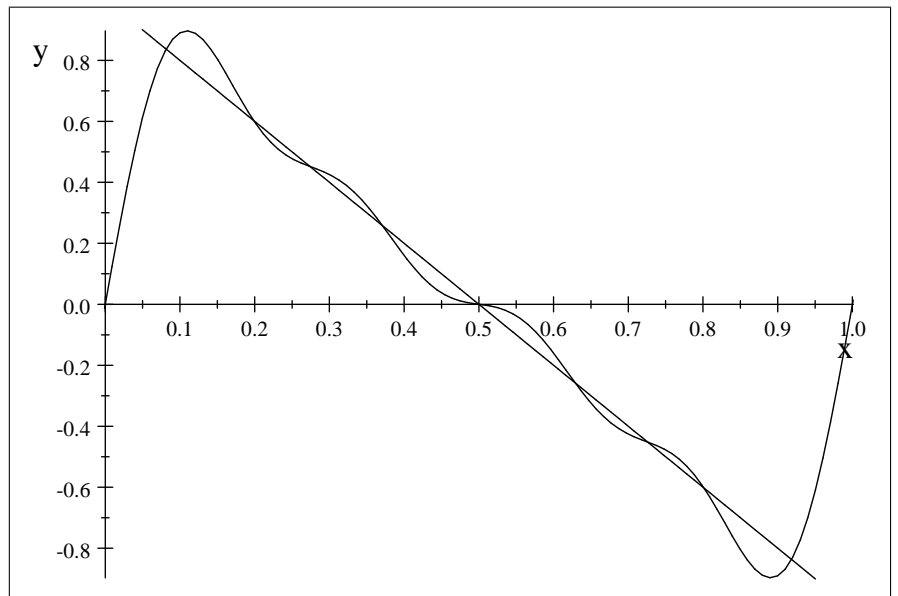
$$f(t) = \begin{cases} t, & T/2 \geq t \geq 0 \\ T - t, & T \geq t \geq T/2 \end{cases}$$

3) Βρείτε το τριγωνομετρικό πολυώνυμο τάξης n το οποίο προσεγγίζει με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων τη συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} 0, & T/2 \geq t \geq 0 \\ 1, & T \geq t \geq T/2 \end{cases}$$

Σχήμα 12.3: Προσέγγιση με Fourier

$$\frac{2}{\pi} (\sin 2\pi x + \frac{1}{2} \sin 4\pi x + \frac{1}{4} \sin 6\pi x + \frac{1}{6} \sin 8\pi x)$$



$$1 - 2x$$

Κεφάλαιο 13

ΧΑΟΣ

Με τη λέξη χάος συνήθως περιγράφουμε ανεξέλεγκτες καταστάσεις. Παραδείγματος χάριν, αν σε μία κεντρική διασταύρωση οι φωτεινοί σηματοδότες πάψουν να λειτουργούν κατά τις ώρες αιχμής, τότε η λέξη που θα αποδίδει καλύτερα την κατάσταση είναι **χάος**.

Ας δούμε όμως μαθηματικά τι είναι το χάος.

Όταν ένα τμήμα πεζικού διασχίζει μία γέφυρα, οι στρατιώτες βαδίζουν ελεύθερα χωρίς βηματισμό κι αυτό γιατί η μικρή ταλάντωση που μπορεί να προκληθεί είναι δυνατόν να προκαλέσει συντονισμό και την καταστροφή της γέφυρας.

Τα χαοτικά συστήματα χαρακτηρίζονται από τέτοιου είδους φαινόμενα όπου 'μικρές ταλαντώσεις' δημιουργούν μεγάλα αποτελέσματα. Αυτή η δραματική εξέλιξη ενός χαοτικού συστήματος περιγράφεται στο τέλος της ενότητας.

Τα χαοτικά δυναμικά συστήματα διαιρούνται σε γραμμικά και μη-γραμμικά. Η δεύτερη κατηγορία είναι πιο σημαντική και πολύπλοκη και η πλειοψηφία των φαινομένων στη φύση υπάγεται σε αυτή. Η πρώτη κατηγορία όμως χρησιμοποιείται και σαν μία προσέγγιση της δεύτερης αφού μαθηματικά μπορούμε να την μελετήσουμε ευκολότερα. Οι διαφορικές εξισώσεις οι οποίες υπεισέρχονται στην δεύτερη κατηγορία είναι μη-γραμμικές κι ιδιαίτερα δύσκολες.

Το 1963 ο Edward Lorenz μελετώντας ένα μοντέλο για την ατμόσφαιρα παρατήρησε το φαινόμενο του χάους.

Η λέξη χάος χρησιμοποιήθηκε αρχικά στα μαθηματικά το 1975 από τους Tien -Yien Li και James Yorke σε ένα άρθρο τους με τίτλο "Period Three Implies Chaos". Ο όρος πλέον χρησιμοποιείται για να περιγράψει την συμπεριφορά ορισμένων μαθηματικών απεικονίσεων και φυσικών φαινομένων που κατά πρώτη ματιά φαίνονται να συμπεριφέρονται τυχαία, αλλά στη πραγματικότητα έχουν ένα ελλοχεύον σημείο τάξης (π.χ. παραγωγή τυχαίου αριθ-

μού, κάρτες μετάθεσης, καρδιακή αρρυθμία, φτερά αεροπλάνου, αποκλίσεις στην τροχιά Pluto κ.α.).

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε μόνο γραμμικά μοντέλα και θα αναπτύξουμε μια ιδιαίτερη χαοτική απεικόνιση γνωστή ως Arnold's cat map (απεικόνιση γατών του Arnold), προερχόμενη από τον Ρώσο μαθηματικό Vladimir I. Arnold ο οποίος έδωσε μια περιγραφή της χαοτικής απεικόνισης χρησιμοποιώντας ένα σχήμα γάτας.

13.1 Η ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΓΑΤΩΝ ΤΟΥ ARNOLD

Για να περιγράψουμε την απεικόνιση γατών του Arnold χρειάζεται να θυμηθούμε μερικές έννοιες για τους modulo αριθμούς. Εάν $x \in \mathbf{R}$, τότε η 'πρόταση' $x \bmod 1$ δείχνει τον μοναδικό αριθμό στο διάστημα $[0, 1)$ που διαφέρει από το x κατά έναν ακέραιο. Για παράδειγμα

$$2.3 \bmod 1 = 0.3, 0.9 \bmod 1 = 0.9, -3.7 \bmod 1 = 0.3, 2 \bmod 1 = 0.$$

Σχόλιο 112 Εάν το x είναι ένας μη αρνητικός αριθμός τότε το $x \bmod 1$ είναι απλά το δεκαδικό μέρος του x , ενώ στη περίπτωση όπου το x είναι ένας αρνητικός αριθμός τότε το $x \bmod 1$ ισοδυναμεί με τον αριθμό (έστω y) με $y \in [0, 1)$ όπου $y = ([x] + 1) + x$. Εδώ $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x .

$$-4.8 \bmod 1 = (4 + 1) + (-4.8) = 0.2$$

Ορισμός 113 Έστω (x, y) ένα διαταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών, η 'πρόταση' $(x, y) \bmod 1$ ισοδυναμεί με $(x \bmod 1, y \bmod 1)$.

$$(2.3, -7.9) \bmod 1 = (0.3, 0.1)$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x , το σημείο $x \bmod 1$ βρίσκεται στο διάστημα $[0, 1)$, ενώ για κάθε διαταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) το σημείο $(x, y) \bmod 1$ βρίσκεται στο μοναδιαίο τετράγωνο

$$S = \{(x, y) | 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}.$$

Τέλος παρατηρούμε ότι το ανώτερο όριο και το δεξί όριο του τετραγώνου

$$\{(x, 1), (1, y) | 0 \leq x, y \leq 1\}$$

δεν συμπεριλαμβάνονται στο S .

Ορισμός 114 Η απεικόνιση γατών του Arnold, είναι ένας μετασχηματισμός

$$\Gamma : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

που καθορίζεται από τον τύπο

$$\Gamma(x, y) = (x + y, x + 2y) \text{ mod } 1.$$

Η προηγούμενη απεικόνιση σε μορφή πινάκων γίνεται

$$(1) \quad \Gamma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mod } 1$$

Για να καταλάβουμε καλύτερα τη γεωμετρική ερμηνεία της απεικόνισης γατών του Arnold, είναι χρήσιμο να γράψουμε την (1) στη μορφή:

$$\Gamma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mod } 1$$

η οποία εκφράζει την απεικόνιση γατών του Arnold ως σύνθεση μιας ανάτρεξης στην x -κατεύθυνση με τον παράγοντα 1, ακολουθούμενη από μια ανάτρεξη στην y -κατεύθυνση με τον παράγοντα 1. Επειδή ο υπολογισμός του μετασχηματισμού είναι $\text{mod } 1$, η Γ αντιστοιχεί όλα τα σημεία της εικόνας (στον \mathbf{R}^2) στο μοναδιαίο τετράγωνο Σ όπως ορίστηκε προηγουμένως. Παρακάτω θα εξηγήσουμε την συμπεριφορά της απεικόνισης γατών του Arnold στο μοναδιαίο τετράγωνο Σ όπως φαίνεται στην εικόνα 13.1 η οποία περιέχει την εικόνα μιας γάτας.

Ισχυρισμός 115 Δεν παίζει κανένα ρόλο εάν οι υπολογισμοί $\text{mod } 1$ πραγματοποιούνται μετά από κάθε ανάτρεξη ή πραγματοποιούνται στο τέλος.

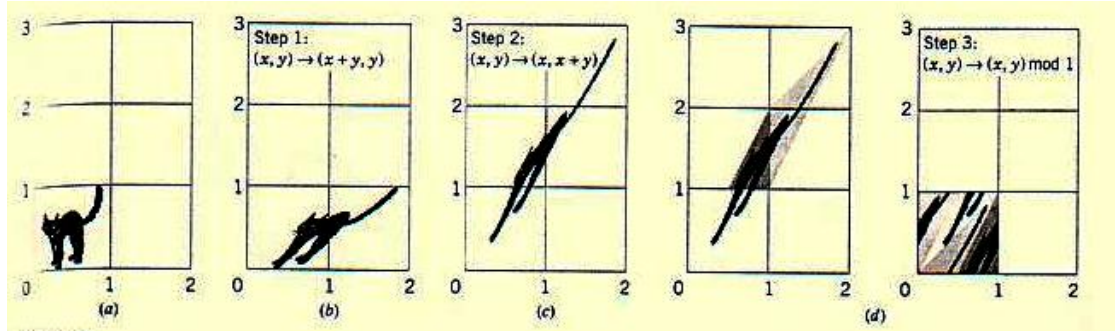
Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει : αν για a, b, c, d τυχαίους πραγματικούς αριθμούς ισχύει $a = b \text{ mod } 1$ και $c = d \text{ mod } 1$, τότε ισχύει $a + c = (b + d) \text{ mod } 1$. Πραγματικά αφού $a = b \text{ mod } 1 \Leftrightarrow a - b = [a]$ (*). Επίσης εφόσον $c = d \text{ mod } 1 \Leftrightarrow c - d = [c]$ (**). Προσθέτοντας τις (*) και (**) κατά μέλη παίρνουμε

$$(a - b) + (c - d) = [a] + [c] \Leftrightarrow (a + c) - (b + d) = [a] + [c] \Leftrightarrow$$

$$a + c = (b + d) \text{ mod } 1.$$

Αφού ο $[a] + [c]$ είναι ακέραιος. Ανάλογα εργαζόμαστε και για αρνητικούς αριθμούς. ■

Σχήμα 13.1:



Θα παρουσιάσουμε παρακάτω και τις δυο μεθόδους με μορφή αλγορίθμων, με πρώτη αυτή που ο υπολογισμός *modulo* 1 πραγματοποιείται στο τέλος. Τα βήματα είναι τα ακόλουθα :

Αλγόριθμος 1

Βήμα 1: Ανάτρεξη στην ξ -κατεύθυνση με τον παράγοντα 1 (εικόνα 13.1 b) :

$$(x, y) \rightarrow (x + y, y)$$

ή σε μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix}.$$

Βήμα 2: Ανάτρεξη στην y -κατεύθυνση με τον παράγοντα 1 (εικόνα 13.1 c) :

$$(x, y) \rightarrow (x, x + y)$$

ή σε μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Βήμα 3: Επανασυναρμολόγηση μέσα στο Σ (εικόνα 13.1 d) :

$$(x, y) \rightarrow (x, y) \bmod 1$$

Η γεωμετρική ερμηνεία του *modulo* 1 είναι να χωριστεί το παραλληλόγραμμο του σχήματος 13.1 1c και να επανασυναρμολογηθούν εκ νέου τα κομμάτια στο Σ όπως φαίνεται στην εικόνα 13.1 d.

Για την αντίστοιχη εφαρμογή της απεικόνισης γατών του Arnold στους υπολογιστές, είναι προτιμότερο να εκτελείται η *modulo 1* διαδικασία σε κάθε βήμα ξεχωριστά, παρά στο τέλος. Με αυτή τη προσέγγιση, υπάρχει μια επανασυναρμολόγηση σε κάθε βήμα, αλλά το τελικό αποτέλεσμα (η τελικά μορφή του Σ) είναι το ίδιο.

Τα βήματα του αντίστοιχου αλγορίθμου, είναι τα ακόλουθα :

Αλγόριθμος 2

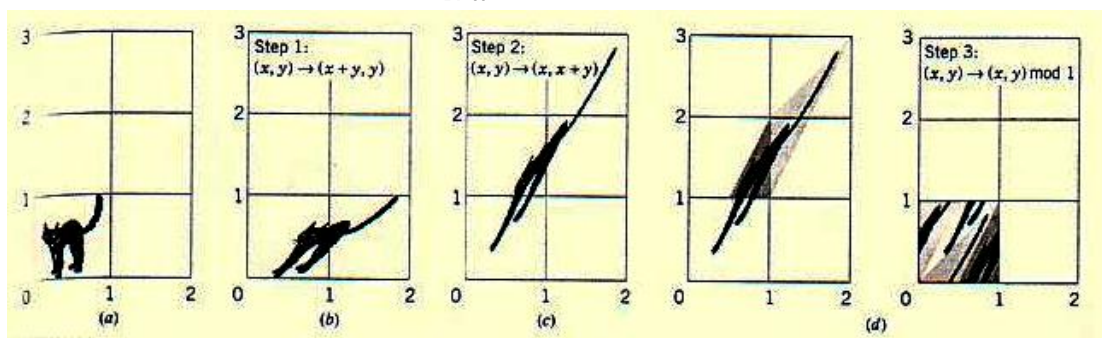
Βήμα 1: Ανάτρεξη στη x -κατεύθυνση με τον παράγοντα 1, που ακολουθείται από μια επανασυναρμολόγηση στο Σ (εικόνα 13.2 b):

$$(x, y) \rightarrow (x + y, y) \bmod 1.$$

Βήμα 2: Ανάτρεξη στη y -κατεύθυνση με τον παράγοντα 1, που ακολουθείται από μια επανασυναρμολόγηση στο Σ (εικόνα 13.2 c):

$$(x, y) \rightarrow (x, y + x) \bmod 1.$$

Σχήμα 13.2:



13.2 ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Οι χαοτικές χαρτογραφήσεις όπως η απεικόνιση γατών του Arnold προκύπτουν συνήθως σε φυσικά φαινόμενα / μοντέλα στα οποία μια λειτουργία εκτελείται επανειλημμένα. Παραδείγματος χάριν, τα χαρτιά της τράπουλας αναμιγνύονται από τις επαναλαμβανόμενες μεταθέσεις, το χρώμα αναμιγνύεται από το επαναλαμβανόμενο ανακάτεμα και ούτω καθεξής. Κατά συνέπεια, ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε την επίπτωση στο Σ των επαναλαμβανόμενων εφαρμογών (ή επαναλήψεων) της απεικόνισης γατών του Arnold.

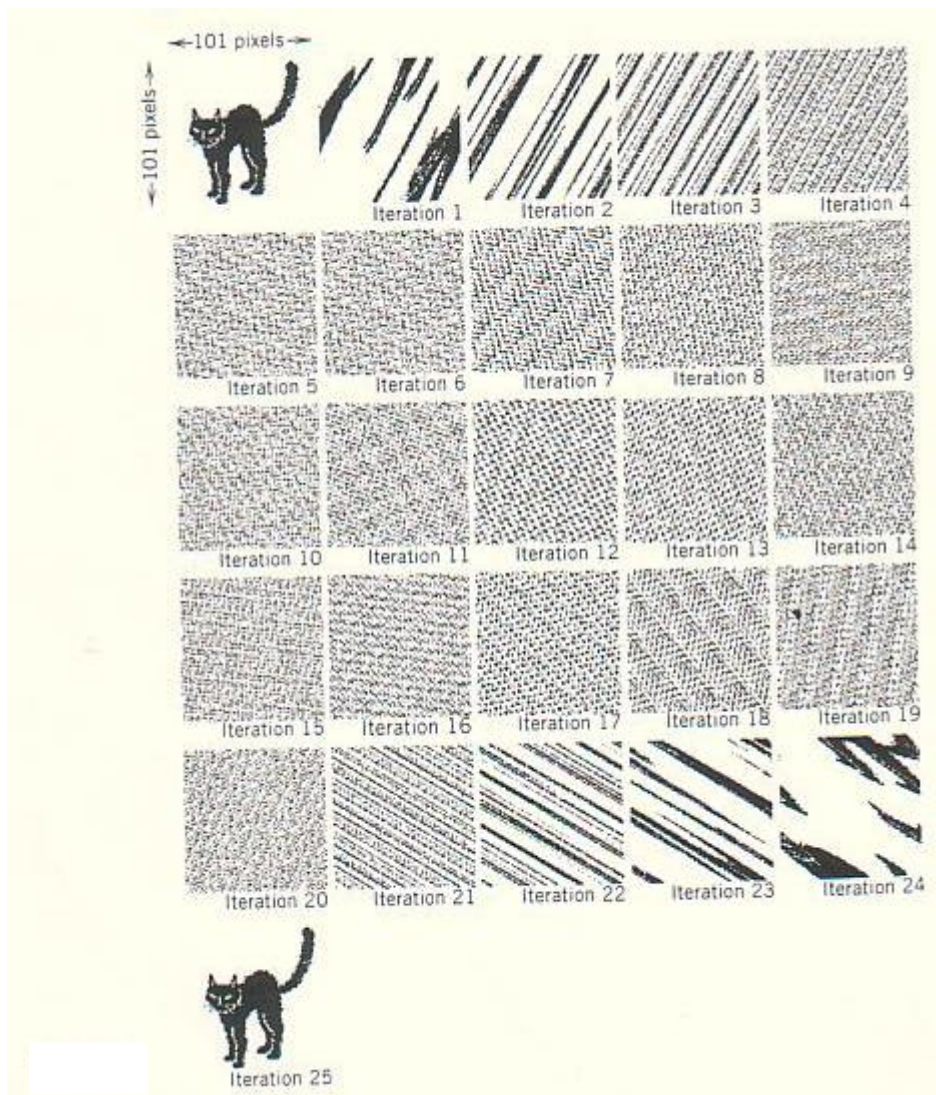
Η εικόνα 13.3, η οποία παρήχθη σε έναν υπολογιστή, απεικονίζει 25 επανειλημμένες εφαρμογές της απεικόνισης γατών του Arnold επάνω στη γάτα, στο μοναδιαίο τετράγωνο Σ . Δυο ενδιαφέροντα φαινόμενα παρατηρούνται :

Η γάτα επιστρέφει στην αρχική μορφή της στην 25η επανάληψη.

Σε μερικές από τις ενδιάμεσες επαναλήψεις, η γάτα αποσυντίθεται σε ραβδώσεις που φαίνεται να έχουν μια συγκεκριμένη κατεύθυνση.

Σκοπός μας είναι να μελετήσουμε αυτά τα φαινόμενα.

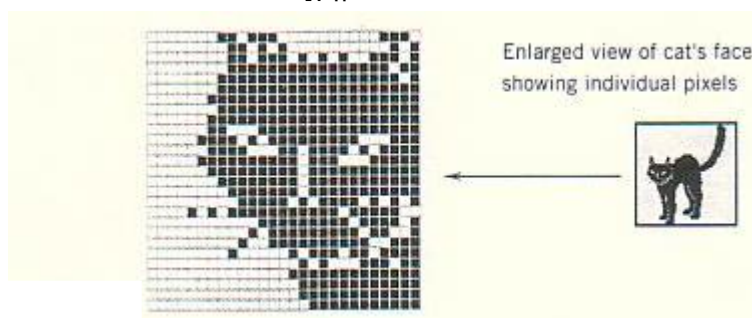
Σχήμα 13.3:



13.3 ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

Ο πρώτος μας στόχος είναι να εξηγήσουμε γιατί η γάτα στην εικόνα 13.3, επιστρέφει στην αρχική της διαμόρφωση, στην 25η επανάληψη. Για αυτόν το λόγο θα μας βοηθήσει το να σκεφτούμε την εικόνα πάνω στους xy - άξονες ως μια ανάθεση χρωμάτων στα σημεία των αξόνων.

Σχήμα 13.4:

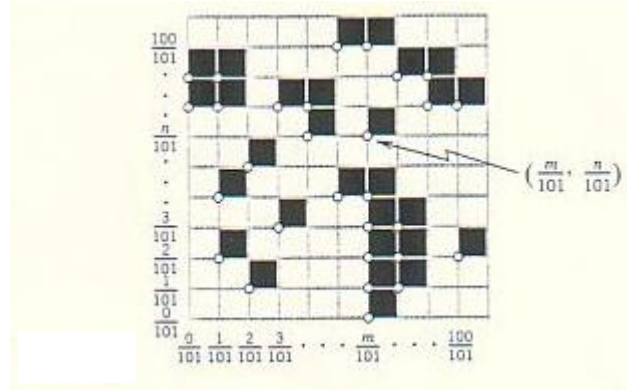


Για τις εικόνες που παράγονται σε μια οθόνη υπολογιστή ή άλλη ψηφιακή συσκευή, οι περιορισμοί που υπάρχουν (λόγω δυνατοτήτων του υπολογιστή ή αντίστοιχα άλλης ψηφιακής συσκευής), έχουν σαν αποτέλεσμα να χωρίζεται η εικόνα σε μικρά τετράγωνα, τα οποία ονομάζονται **pixels**. Πχ, στις παραγόμενες από υπολογιστή εικόνες, στην εικόνα 13.3, το μοναδιαίο τετράγωνο Σ διαιρείται σε ένα πλέγμα με 101 pixels ανά πλευρά (άρα συνολικά σ' αυτό το τετράγωνο θα έχουμε 10.201 pixels), κάθε ένα από τα οποία είναι μαύρο ή άσπρο (εικόνα 13.4). Η εικόνα που δημιουργείται από την ανάθεση των χρωμάτων στα pixels, ονομάζεται **pixel map**: (pixel απεικόνιση) \rightarrow (εικόνα pixel).

Όπως φαίνεται στην εικόνα 13.5, σε κάθε pixel του Σ , μπορεί να ανατεθεί ένα μοναδικό ζεύγος συντεταγμένων της μορφής $(m/101, n/101)$ που προσδιορίζει την κάτω αριστερή γωνία του pixel, όπου τα m και n είναι ακέραιοι στο διάστημα $[0, 100]$.

Καλούμε τα σημεία αυτά pixel points λόγω του ότι κάθε τέτοιο σημείο προσδιορίζει ένα μοναδικό pixel. Αντί της συγκεκριμένης περίπτωσης, όπου το Σ διαιρείται σε 101 pixels ανά πλευρά, ας εξετάσουμε τη γενικότερη περίπτωση, κατά την οποία το Σ διαιρείται σε p pixels ανά πλευρά. Κατά συνέπεια, κάθε εικόνα pixel στο Σ , αποτελείται από p^2 pixels που δημιουργούνται αν χωρίσουμε και στους δύο άξονες (τους x και y) σε $1/p$ ίσα διαστήματα αντίστοιχα. Τα σημεία pixel (pixel points) στο Σ έχουν συντεταγμένες της μορφής $(m/p, n/p)$, όπου m και n είναι ακέραιοι στο διάστημα $[0, p - 1]$.

Σχήμα 13.5:



Μελετώντας την απεικόνιση γατών του Arnold κάθε pixel σημείο του Σ , μετασχηματίζεται σε ένα άλλο pixel σημείο του Σ . Για να καταλάβουμε γιατί συμβαίνει αυτό, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η εικόνα του σημείου pixel $(m/p, n/p)$ μέσω του μετασχηματισμού Γ , δίνεται σε μορφή πινάκων από :

$$(2) \quad \Gamma \begin{pmatrix} m/p \\ n/p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m/p \\ n/p \end{pmatrix} \text{mod} 1 = \begin{pmatrix} (m+n)/p \\ (m+2n)/p \end{pmatrix} \text{mod} 1.$$

Το διατεταγμένο ζεύγος $((m+n)/p, (m+2n)/p) \text{mod} 1$, είναι της μορφής $(m'/p, n'/p)$, όπου τα m' και n' είναι ακέραιοι αριθμοί που ανήκουν στο διάστημα $[0, p-1]$. Συγκεκριμένα, τα m' και n' είναι τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $(m+n)/p$ και $(m+2n)/p$ αντίστοιχα. Συνεπώς, κάθε σημείο μέσα στο Σ , της μορφής $(m/p, n/p)$, απεικονίζεται σε ένα άλλο σημείο της ίδιας μορφής.

Έτσι, επειδή η απεικόνιση γατών του Arnold μετασχηματίζει κάθε σημείο pixel του Σ σε ένα άλλο σημείο pixel του Σ και επειδή υπάρχουν μόνο p^2 διαφορετικά σημεία στο Σ , είναι προφανές, ότι οποιοδήποτε δεδομένο σημείο pixel κι αν πάρουμε αυτό πρέπει να επιστρέψει στην αρχική του θέση, μετά από $p^2 + 1$ το πολύ επαναλήψεις.

Εάν $p = 76$, τότε από τη (2), θα έχουμε :

$$\Gamma \begin{pmatrix} m/76 \\ n/76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m+n)/76 \\ (m+2n)/76 \end{pmatrix} \text{mod} 1.$$

Σε αυτή τη περίπτωση οι διαδοχικές επαναλήψεις του σημείου $(27/76, 58/76)$, είναι :

Ισχυρισμός 116 Το σημείο $(0, 0)$ είναι το μόνο σταθερό σημείο της απεικόνισης γατών του Arnold.

Απόδειξη. Πραγματικά, έστω ένα σημείο (x_0, y_0) με x_0 και y_0 , να είναι της μορφής m/p και n/p αντίστοιχα, σύμφωνα με όσα προαναφέραμε. Θέλουμε να δείξουμε, ότι το $(0, 0)$ είναι το μόνο σταθερό σημείο της απεικόνισης γατών του Arnold. Δηλαδή, σύμφωνα με τον ορισμό των σταθερών σημείων που δώσαμε, είναι το μόνο σημείο το οποίο με τη πρώτη εφαρμογή του μετασχηματισμού της απεικόνισης γατών του Arnold, επιστρέφει στο ίδιο σημείο. Δηλαδή, ισχύει

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{mod} 1.$$

Έστω ότι υπάρχει κι άλλο σημείο με αυτή την ιδιότητα. Επειδή m, n ακέραιοι από το διάστημα $[0, p-1]$, τα x_0 και y_0 , όπως γνωρίζουμε, σαν σημεία pixel θα είναι αριθμοί από το διάστημα $[0, 1)$ (χωρίς τα m και n να είναι ταυτόχρονα 0). Αν το μεταφέρουμε σε μορφή πινάκων με τις συντεταγμένες αναλυτικά, έχουμε :

$$\begin{aligned} (3) \quad \begin{pmatrix} m/p \\ n/p \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m/p \\ n/p \end{pmatrix} \text{mod} 1 = \begin{pmatrix} (m+n)/p \\ (m+2n)/p \end{pmatrix} \text{mod} 1 = \\ &= \begin{pmatrix} (m+n)/p \text{mod} 1 \\ (m+2n)/p \text{mod} 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m/p \text{mod} 1 + n/p \text{mod} 1 \\ m/p \text{mod} 1 + 2n/p \text{mod} 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m/p \\ n/p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m/p \text{mod} 1 + n/p \text{mod} 1 \\ m/p \text{mod} 1 + 2n/p \text{mod} 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Άρα $n = kp$ και $m = wp$, όπου $k, w = 0, 1, 2, \dots$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού $m, n \in [0, p-1)$ χωρίς και τα δυο ταυτόχρονα να είναι 0. Καταλήξαμε σε άτοπο, έχοντας κάνει την υπόθεση ότι υπάρχει κι άλλο σημείο, εκτός του $(0, 0)$ που να είναι σταθερό. Άρα το μοναδικό σταθερό σημείο είναι το $(0, 0)$.

Ένας άλλος τρόπος που μπορούμε να το δούμε αυτό το συμπέρασμα, είναι ο επόμενος.

Έστω $x = (x_0, y_0)$. Από τη σχέση 3, το διατεταγμένο ζεύγος $((m+n)/p, (m+2n)/p) \text{mod} 1$, είναι της μορφής $(m'/p, n'/p)$, όπου τα m' και n' είναι ακέραιοι αριθμοί που ανήκουν στο διάστημα $[0, p-1]$. Συγκεκριμένα, τα m' και n' είναι τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $(m+n)/p$ και $(m+2n)/p$ αντίστοιχα. Άρα πρέπει να ισχύει $m = m'$ και $n = n'$. Αυτό ισχύει αν και μόνο αν

$$x = Cx \Leftrightarrow (I - C)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Καταλήγουμε σε ένα ομογενές σύστημα του οποίου η οριζούσα είναι -1 . Άρα έχει μόνο τη μηδενική λύση, και άρα μόνο το σημείο $(0, 0)$ το επαληθεύει. ■

13.4 ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΚΑΙ ΠΛΑΤΟΣ ΤΩΝ PIXELS

Εάν P_1 και P_2 είναι σημεία με περιόδους q_1 και q_2 αντίστοιχα, τότε το P_1 επιστρέφει στην αρχική του θέση μετά από q_1 επαναλήψεις (αλλά όχι νωρίτερα), και το P_2 επιστρέφει στην αρχική του θέση μετά από q_2 επαναλήψεις (αλλά όχι πιο σύντομα). Κατά συνέπεια, και τα δύο σημεία επιστρέφουν στις αρχικές τους θέσεις ταυτόχρονα, για οποιονδήποτε αριθμό επαναλήψεων είναι κοινό πολλαπλάσιο των q_1 και q_2 . Γενικά, για μια εικόνα pixel, με p^2 σημεία pixel της μορφής $(m/p, n/p)$, ορίζουμε ως $\Pi(p)$ το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των περιόδων όλων των σημείων pixel της εικόνας. Δηλαδή, $\Pi(p)$ είναι ο μικρότερος ακέραιος αριθμός που διαιρείται από όλες τις περιόδους. Είναι προφανές ότι η εικόνα pixel θα επιστρέψει στην αρχική της διαμόρφωση σε $\Pi(p)$ επαναλήψεις της απεικόνισης γατών του Arnold, αλλά όχι νωρίτερα. Για αυτό το λόγο, ορίζουμε τον αριθμό $\Pi(p)$ ως **περίοδο της pixel εικόνας**.

Και τώρα ήρθε η στιγμή να διαπιστώσουμε γιατί η γάτα στην εικόνα 13.3, επιστρέφει στην αρχική της διαμόρφωση μετά από 25 επαναλήψεις. Θυμίζουμε ότι ο μετασχηματισμός που εκτελείται στην απεικόνιση γατών του Arnold είναι ο:

$$\Gamma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mod } 1.$$

Ο πίνακας του είναι ο

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Μετά από 25 ακριβώς επαναλήψεις, βρίσκουμε ότι

$$C^{25} = \begin{pmatrix} 7.778742049 & 12.586269025 \\ 12.586269025 & 20.365011074 \end{pmatrix}.$$

όπου ο αριθμός 12.586269025 διαιρείται από το 101 ακριβώς, και οι αριθμοί 7.778742049 και 20.365011074 όταν διαιρεθούν με το 101 αφήνουν υπόλοιπο 1. Υπενθυμίζουμε ότι παίρνουμε το 101, γιατί σε τόσα pixels χωρίσαμε την εικόνα της γάτας. Άρα :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{m}{101} \\ \frac{n}{101} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 7.778742049 & 12.586269025 \\ 12.586269025 & 20.365011074 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{m}{101} \\ \frac{n}{101} \end{pmatrix} \text{ mod } 1 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{m}{101} \\ \frac{n}{101} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (7.778742049m/101) \text{ mod } 1 & (12.586269025n/101) \text{ mod } 1 \\ (12.586269025m/101) \text{ mod } 1 & (20.365011074n/101) \text{ mod } 1 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

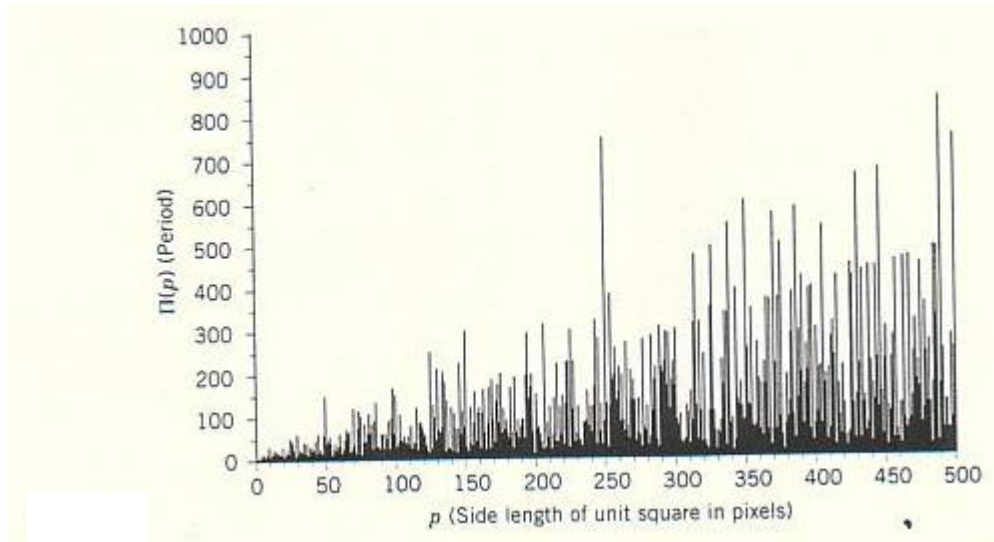
$$\left(\begin{array}{c} \frac{m}{101} \\ \frac{n}{101} \end{array} \right).$$

Άρα στην 25η επανάληψη όλα τα σημεία pixels θα επιστρέψουν στην αρχική τους θέση. Προφανώς δε μπορεί κάποιο σημείο να έχει περίοδο αριθμό μη-διαίρετη του 25. Διότι αν είχε, τότε στην 25η επανάληψη δε θα επέστρεφε στην αρχική του θέση, πράγμα που είναι αδύνατο με όσα προαναφέραμε. Άρα οι πιθανές περίοδοι των σημείων θα είναι 1 (το σημείο (0, 0)), 5 ή 25. Και $\Pi(p) = EK\Pi(1, 5, 25) = 25$ που μας επιβεβαιώνει το γεγονός της επιστροφής της εικόνας της γάτας στην αρχική της μορφή.

Η εικόνα 13.7, μας δείχνει πώς η περίοδος μιας εικόνας pixel, ποικίλλει ανάλογα με τον αριθμό p . Ενώ η γενική τάση για την περίοδο είναι να αυξάνεται καθώς το p αυξάνει, υπάρχει ένα εκπληκτικό φαινόμενο παρατυπίας όπως βλέπουμε στη γραφική παράσταση. Δηλαδή, δεν υπάρχει καμία απλή λειτουργία που να προσδιορίζει ή προβλέπει αυτή τη σχέση. Ενδεικτικά αναφέραμε ότι από κάποια μελέτη των Dyson and H. Falk το 1992, παρατηρήθηκαν τα εξής αποτελέσματα:

- ι) $\Pi(p) = 3p \iff p = 2 \cdot 5^k$, για $k = 1, 2, \dots$
- ιι) $\Pi(p) = 2p \iff p = 5^k$, για $k = 1, 2, \dots$, ή $p = 6 \cdot 5^k$, για $k = 0, 1, 2, \dots$
- ιιι) $\Pi(p) \leq 12p/7$, για κάθε άλλη περίπτωση του p .

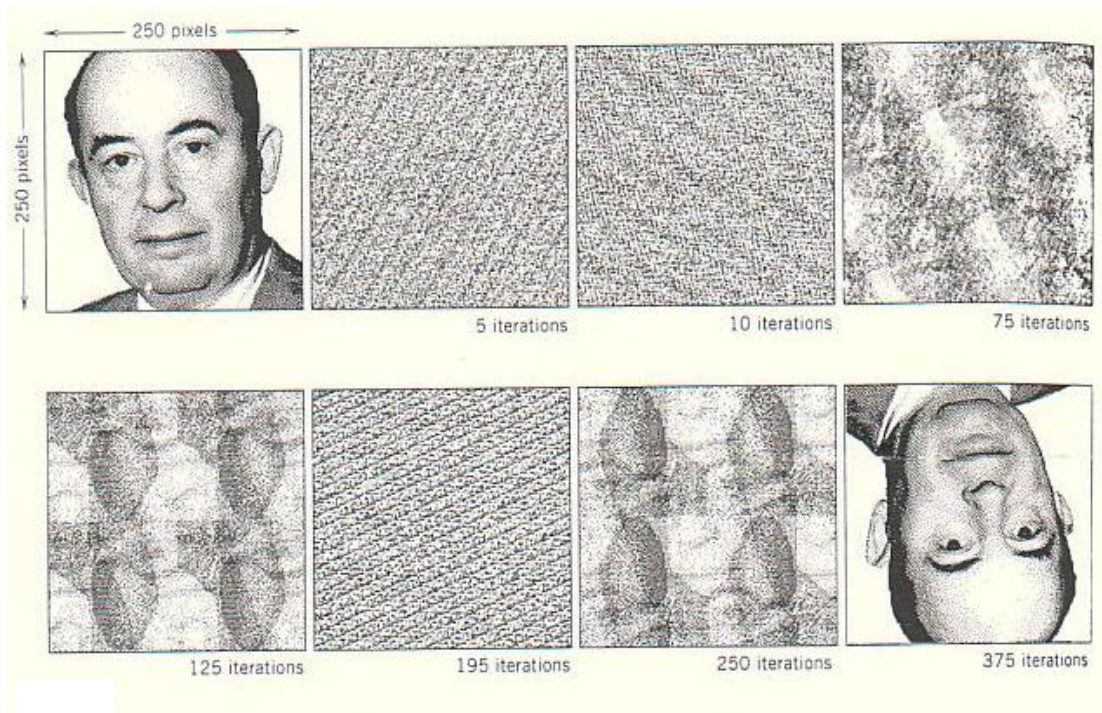
Σχήμα 13.7:



Αν και μια εικόνα με p pixels ανά πλευρά δεν επιστρέφει ποτέ στην αρχική της διαμόρφωση πριν πραγματοποιηθούν $\Pi(p)$ επαναλήψεις, διάφορα

απροσδόκητα φαινόμενα μπορούν να εμφανιστούν σε ενδιάμεσες επαναλήψεις. Για παράδειγμα, στην εικόνα 13.8, βλέπουμε μια φωτογραφία σε pixel με $p = 250$ pixels ανά πλευρά του διάσημου Ουγγρικο-Αμερικανού μαθηματικού John von Neumann. Συγκεκριμένα $p = 250 = 2 \cdot 5^3$, άρα $\Pi(250) = 3p = 3 \cdot 250 = 750$. Άρα η pixel εικόνα, θα επιστρέψει στην αρχική της μορφή μετά από ακριβώς 750 επαναλήψεις της απεικόνισης γατών του Arnold (αλλά όχι νωρίτερα). Εντούτοις, μετά από 375 επαναλήψεις (επί συνόλου 750), η pixel εικόνα θα έχει αναποδογυρίσει, και αμέσως μετά από 375 επαναλήψεις η εικόνα pixel θα επιστρέψει στην αρχική της μορφή. Επιπλέον, υπάρχουν πάρα πολλά σημεία pixel με αντίστοιχες περιόδους αριθμούς διαιρέτες του 750 έτσι ώστε να παρατηρούμε εικόνες 'φαντάσματα' της αρχικής εικόνας, που στο βάθος να σκιαγραφείται η αρχική εικόνα. Για παράδειγμα στην εικόνα 13.8, αυτό φαίνεται μετά από 125 ή 250. Τέλος, παρατηρούμε ότι μετά από 195 επαναλήψεις, οι πολυάριθμες μικρογραφίες της αρχικής ομοιότητας εμφανίζονται στις διαγώνιες σειρές.

Σχήμα 13.8:



13.5 ΤΟ ΠΛΑΚΟΣΤΡΩΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

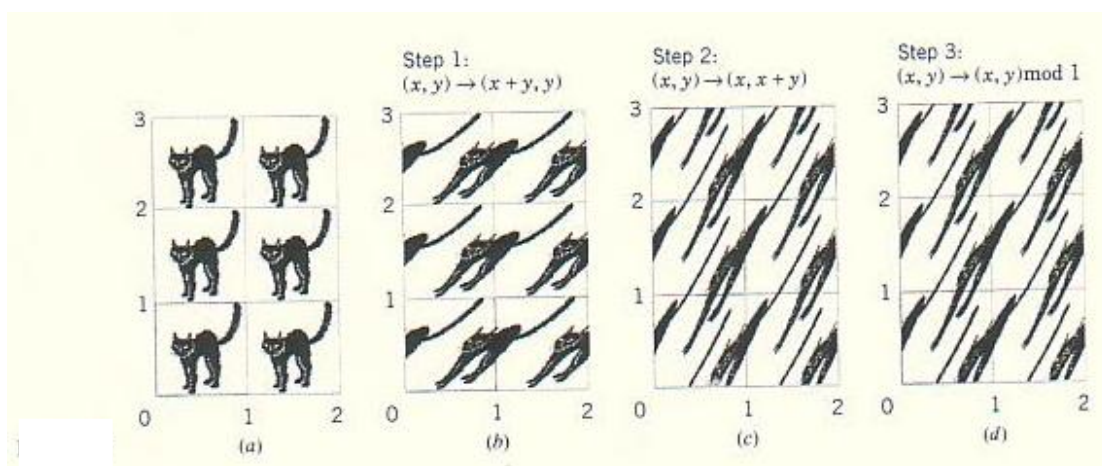
Ο επόμενος στόχος μας είναι να εξηγήσουμε την αιτία της ύπαρξης των γραμμικών ραβδώσεων που εμφανίζονται στην εικόνα 13.3. Για αυτόν το λόγο θα πρέπει να δούμε την απεικόνιση γατών του Arnold με διαφορετικό τρόπο. Όπως παρατηρούμε η απεικόνιση γατών του Arnold δεν είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός εξαιτίας της παρουσίας του *modulo* 1. Εντούτοις, υπάρχει ένας εναλλακτικός τρόπος να καθορίσουμε την απεικόνιση γατών του Arnold, ο οποίος να αποφεύγει το *mod*1 μέσα από τον μετασχηματισμό και να οδηγεί έτσι σε έναν γραμμικό μετασχηματισμό. Για να το πετύχουμε αυτό, ας φανταστούμε το μοναδιαίο τετράγωνο Σ (που περιέχει την εικόνα της γάτας) σαν ένα **‘πλακάκι’** και ας υποθέσουμε ότι ολόκληρη η *xy*-εικόνα είναι καλυμμένη με τέτοια ‘πλακάκια’, όπως φαίνεται στην εικόνα 13.9. Λέμε ότι η *xy*-εικόνα έχει πλακοστρωθεί (καλυφθεί από τέτοια ‘πλακάκια’) με το μοναδιαίο τετράγωνο. Εάν εμείς εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό, χωρίς αυτή τη φορά το *mod*1, δηλαδή αν εφαρμόσουμε τον γραμμικό μετασχηματισμό σε ολόκληρη την πλακοστρωμένη εικόνα, μπορεί να αποδειχτεί ότι το μέρος της εικόνας που βρίσκεται μέσα στο μοναδιαίο τετράγωνο Σ θα είναι ίδιο με αυτό που καταλήγουμε αν εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό έχοντας συμπεριλάβει και το *mod*1. Βλέπε μέρη (α) και (δ) της εικόνας 13.9. Συμπερασματικά, η **‘πλακόστρωση’** (tiling) οδηγεί στην ίδια pixel εικόνα μέσα στο μοναδιαίο τετράγωνο Σ με την αντίστοιχη, αν συμπεριλάβουμε στον μετασχηματισμό το *mod*1. Η διαφορά εδώ είναι ότι στη πλακοστρωμένη μορφή της απεικόνισης γατών του Arnold εκτελείται ένας γραμμικός μετασχηματισμός.

Είναι σημαντικό να καταλάβουμε, ότι η περιοδικότητα της εικόνας pixel και στις δυο περιπτώσεις: στην ‘πλακόστρωση’ και στη περίπτωση που συμπεριλάβουμε στον μετασχηματισμό το *mod*1, προκύπτει με διαφορετικό τρόπο. Εάν μια εικόνα pixel στο Σ έχει περίοδο n , τότε στην περίπτωση της εφαρμογής του μη-γραμμικού μετασχηματισμού, κάθε σημείο επιστρέφει στην αρχική του θέση στο τέλος των n επαναλήψεων. Στη περίπτωση που εφαρμόσουμε τον γραμμικό μετασχηματισμό, τα σημεία δεν είναι απαραίτητα να επιστρέψουν στις αρχικές τους θέσεις, αλλά κάθε σημείο αντικαθίστανται από ένα σημείο του ίδιου χρώματος στο τέλος των n επαναλήψεων.

13.6 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ ΤΗΣ ΓΑΤΑΣ ΤΟΥ ARNOLD

Για να καταλάβουμε την αιτία της ύπαρξης των ραβδώσεων στην εικόνα 13.3, ας σκεφτούμε την απεικόνιση γατών του Arnold, ως έναν γραμμικό μετασχη-

Σχήμα 13.9:



ματισμό στο πλακοστρωμένο επίπεδο. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ο οποίος ορίζει κατά μια έννοια τον μετασχηματισμό της απεικόνισης γατών του Arnold, είναι συμμετρικός και έχει ως ορίζουσα το 1. Το γεγονός του ότι έχει ως ορίζουσα το 1, σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός Σ διατηρεί το εμβαδόν. Αυτό είναι επίσης φανερό για τα σημεία στο Σ στην περίπτωση της $mod 1$, καθώς η επίδραση της $mod 1$ στην εικόνα είναι να κοπούν όλα τα σημεία που βρίσκονται εκτός του Σ και να επανασυναρμολογηθούν εκ νέου μέσα στο Σ χωρίς καμία επικάλυψη, όπως φαίνεται στην εικόνα 13.1 d. Κατά συνέπεια, 'η περιοχή' που καταλαμβάνει η γάτα στην αρχή, είναι η ίδια με την συνολική περιοχή που καταλαμβάνουν οι κουκίδες σε οποιαδήποτε επανάληψη.

Αφού ο πίνακας είναι συμμετρικός, οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τους είναι κάθετα. Υπολογίζοντας τα από τον C , βρίσκουμε ότι :

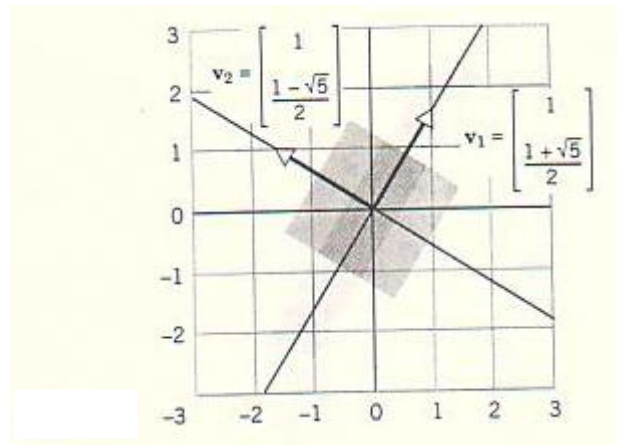
$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2.618 \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0.3819$$

με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.618 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.618 \end{pmatrix}.$$

Σε κάθε εφαρμογή της απεικόνισης γατών του Arnold, η ιδιοτιμή λ_1 προκαλεί μια μεγέθυνση (ένα τέντωμα) προς τη κατεύθυνση του ιδιοδιανύσματος της από ένα παράγοντα 2.6180, και η ιδιοτιμή λ_2 προκαλεί μια σμίκρυνση (συμπίεση) προς τη κατεύθυνση του ιδιοδιανύσματος της από ένα παράγοντα 0.3819. Η εικόνα 13.9 μας δείχνει ένα κεντροθετειμένο τετράγωνο, του οποίου οι πλευρές είναι παράλληλες προς τις κατευθύνσεις των δυο αυτών ιδιοδιανυσμάτων (v_1 και v_2). Σύμφωνα με την παρακάτω εικόνα, το αρχικό κεντροθετειμένο τετράγωνο 'παραμορφώνεται' σε ένα ορθογώνιο του οποίου οι πλευρές είναι επίσης παράλληλες προς τις κατευθύνσεις των v_1 και v_2 . Το 'εμβαδόν' του τετραγώνου είναι το ίδιο με το 'εμβαδόν' του ορθογώνιου.

Σχήμα 13.10:



Για να εξηγήσουμε την αιτία της ύπαρξης των ραβδώσεων στην εικόνα 13.3, ας θεωρήσουμε το Σ ως μέρος του πλακοστρωμένου επιπέδου και έστω p ένα σημείο του Σ με περίοδο n . Επειδή εξετάζουμε την περίπτωση του γραμμικού μετασχηματισμού (την περίπτωση της πλακόστρωσης), υπάρχει ένα σημείο q μέσα στο όλο πλάνο που έχει το ίδιο χρώμα με το σημείο p και κατά τη διάρκεια των διαδοχικών επαναλήψεων το q κινείται προς τη θέση που καταλαμβάνει αρχικά το p , παίρνοντας τελικά αυτή τη θέση στη n -οστή επανάληψη. Συγκεκριμένα το σημείο

$$q = (C^{-1})^n p.$$

Από τη σχέση :

$$C^n q = C^n (C^{-n} p) = p.$$

Κατά συνέπεια, με τις διαδοχικές επαναλήψεις, τα σημεία του Σ απομακρύνονται από τις αρχικές τους θέσεις. Ενώ την ίδια στιγμή, άλλα σημεία της όλης εικόνας πλησιάζουν προς τις αρχικές θέσεις των προηγούμενων

σημείων του Σ , ολοκληρώνοντας την κίνησή τους στην τελική επανάληψη του κύκλου. Αν ο κύκλος είναι n -κύκλος όπως τον έχουμε ορίσει, θα ολοκληρώσουν την κίνησή τους στη n -οστή επανάληψη.

Η εικόνα 13.11, επεξηγεί όλα τα παραπάνω στην περίπτωση όπου

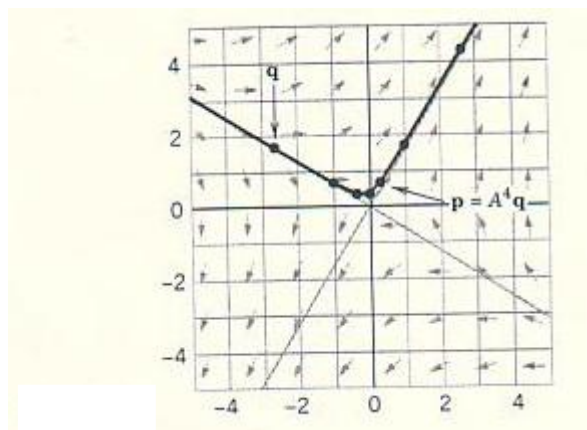
$$n = 4, q = \left(-\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right) \text{ και } p = C^n q = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Σημειώνουμε εδώ ότι

$$p \bmod 1 = q \bmod 1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Ετσι και τα δύο αυτά σημεία καταλαμβάνουν τις ίδιες θέσεις στα αντίστοιχα πλακίδια τους. Το εξερχόμενο σημείο (αυτό που απομακρύνεται), κινείται προς τη γενική κατεύθυνση του ιδιοδιανύσματος v_1 , όπως υποδεικνύεται από τα βέλη στην εικόνα 13.11. Και το εισερχόμενο σημείο, κινείται αντίστοιχα προς τη (γενική) κατεύθυνση του ιδιοδιανύσματος v_2 . Είναι πιο εύκολο να κατανοήσουμε τους όρους εισερχόμενα / εξερχόμενα, αρκεί να φανταστούμε την όλη εικόνα σαν ένα κομμάτι το Σ και γενικά ως φανταστούμε κάθε μοναδιαίο τετράγωνο ξεχωριστά, απ' όπου εισέρχονται και εξέρχονται τα σημεία. Αυτές οι γραμμές ροής (κίνησης), διαμορφώνουν τις ραβδώσεις στην εικόνα 13.3.

Σχήμα 13.11:



13.7 ΜΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

Ως εδώ, έχουμε εξετάσει την επίδραση της απεικόνισης γατών του Arnold σε σημεία pixel της μορφής $(m/p, n/p)$ για έναν αυθαίρετο φυσικό αριθμό p .

Ακόμη γνωρίζουμε ότι όλα αυτά τα σημεία είναι περιοδικά. Θα εξετάσουμε την επίδραση της απεικόνισης γατών του Arnold σε ένα αυθαίρετο σημείο (a, b) στο Σ . Θα ταξινομούμε αυτά τα σημεία σε ρητά, εάν οι συντεταγμένες a και b είναι και οι δύο ρητοί αριθμοί, και άρρητα εάν μια τουλάχιστον από τις συντεταγμένες είναι άρρητος αριθμός. Κάθε ρητό σημείο είναι περιοδικό, αφού είναι σημείο pixel, για κατάλληλη επιλογή του p . Για παράδειγμα, το ρητό σημείο $(r_1/s_1, r_2/s_2)$ μπορεί να γραφτεί ως $(r_1s_2/s_1s_2, r_2s_1/s_1s_2)$, οπότε είναι σημείο pixel με $p = s_1s_2$.

Μπορεί να αποδειχτεί ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή κάθε περιοδικό σημείο είναι ρητό.

Από το τελευταίο προκύπτει ότι τα άρρητα σημεία του Σ δεν είναι περιοδικά. Έτσι όλες οι διαδοχικές επαναλήψεις ενός άρρητου σημείου του Σ δίνουν άλλα ευδιάκριτα σημεία στο Σ . Η εικόνα 13.12 προέκυψε μέσω υπολογιστή και μας δείχνει ένα άρρητο σημείο και την εξέλιξη του μέχρι και τις 100.000 επαναλήψεις. Για αυτό το συγκεκριμένο άρρητο σημείο που επιλέξαμε, τα σημεία που προκύπτουν μέσω των επαναλήψεων δεν φαίνεται να συγκεντρώνονται σε οποιαδήποτε συγκεκριμένη περιοχή του Σ . Αλλά αντιθέτως φαίνεται να διαδίδονται σε όλο το Σ , το οποίο γίνεται πυκνότερο με τις διαδοχικές επαναλήψεις.

Η συμπεριφορά των επαναλήψεων στην εικόνα 13.12, είναι αρκετά σημαντική καθώς υπάρχει μια ορολογία που συνδέεται με αυτή.

Ορισμός 117 *Θα λέμε ότι ένα υποσύνολο D σημείων του $\Sigma \neq \emptyset$, είναι **πυκνό** στο Σ , εάν κάθε κύκλος με κέντρο οποιοδήποτε σημείο του Σ εσωκλείει σημεία του D , ανεξάρτητα από το πόσο μικρή είναι η ακτίνα του κύκλου που παίρνουμε (εικόνα 13.13).*

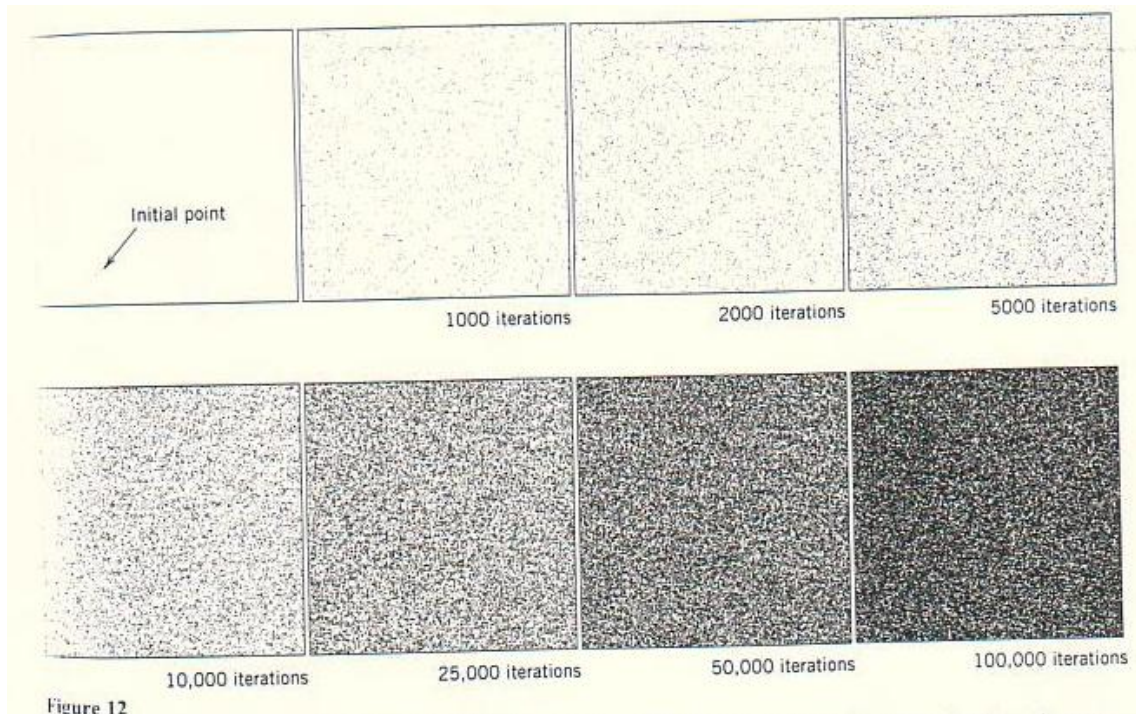
Είναι γνωστό ότι οι ρητοί είναι πυκνοί στους πραγματικούς. Άρα τα ρητά σημεία είναι πυκνά στο Σ και τα περισσότερα άρρητα σημεία (όχι όλα) που προκύπτουν μέσα από τις επαναλήψεις αποδεικνύεται ότι είναι πυκνά στο Σ .

13.8 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΧΑΟΥΣ

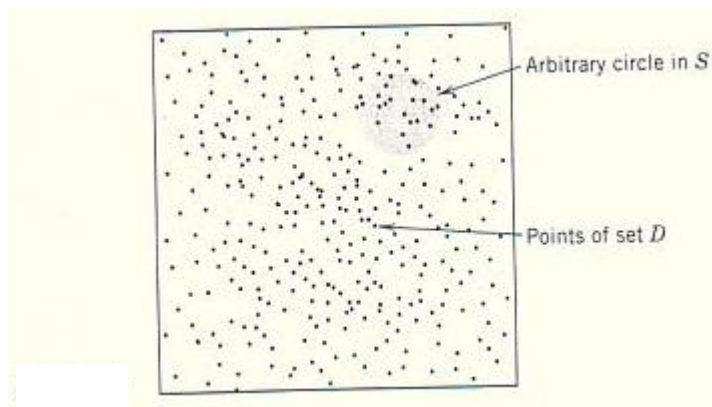
Γνωρίζουμε, μέσω της απεικόνισης γατών του Arnold, ότι τα ρητά σημεία του Σ είναι περιοδικά και πυκνά στο Σ και μερικά από τα άρρητα σημεία (όχι όλα) έχουν επαναλήψεις κατά τις οποίες είναι πυκνά στο Σ . Αυτά είναι τα βασικά χαρακτηριστικά του χάους.

Υπάρχουν διάφοροι ορισμοί του χάους που χρησιμοποιούνται αυτή την εποχή, αλλά ο ακόλουθος (ο οποίος εισήχθη από τον Robert L. Devaney το 1986 στο βιβλίο του με τίτλο 'Μια εισαγωγή στα χαοτικά δυναμικά συστήματα'), συσχετίζεται περισσότερο με το θέμα μας.

Σχήμα 13.12:



Σχήμα 13.13:



Ορισμός 118 *Μια συνεχής χαρτογράφηση T του S επάνω στον εαυτό της θα καλείται **χαοτική**,*

1) Το S περιέχει ένα πυκνό υποσύνολο περιοδικών σημείων της T ,

υ) Υπάρχει ένα σημείο Σ το x_0 μέσω των επαναλήψεων της T το σύνολο που δημιουργείται $\{x_0, T(x_0), T^2(x_0), \dots\}$ να είναι πυκνό Σ .

Μπορεί να αποδειχτεί ότι η απεικόνιση γατών του Arnold είναι συνεχής και ικανοποιεί τον ορισμό της χαοτικής απεικόνισης. Το αξιοσημείωτο του ορισμού είναι ότι η χαοτική απεικόνιση αναφέρει ένα σημείο με τάξη και ένα σημείο αταξίας. Τα περιοδικά σημεία επανέρχονται στον εαυτό τους αλλά τα σημεία που είναι πυκνά μέσα από κάποιες επαναλήψεις κινούνται ακανόνιστα, καλύπτοντας συχνά την κανονικότητα των περιοδικών σημείων. Αυτή η συγχώνευση τάξης και αταξίας, χαρακτηρίζει τις χαοτικές χαρτογραφήσεις.

13.9 ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Οι χαοτικές απεικονίσεις προκύπτουν από τη μελέτη των δυναμικών συστημάτων. Σε γενικές γραμμές ένα δυναμικό σύστημα μπορεί να αντιμετωπισθεί ως σύστημα το οποίο έχει μια συγκεκριμένη κατάσταση ή διαμόρφωση σε κάθε χρονική στιγμή, αλλά αυτή αλλάζει κατά τη διάρκεια του χρόνου. Χημικά συστήματα, οικολογικά συστήματα, ηλεκτρικά συστήματα, βιολογικά και οικονομικά συστήματα κ.ο.κ., μπορούν να εξεταστούν με αυτό τον τρόπο.

Σε ένα διακριτό χρονικά δυναμικό σύστημα η κατάσταση (η διαμόρφωση) αλλάζει στα διακριτά σημεία του χρόνου περισσότερο από ενδιάμεσες χρονικές στιγμές. Σε ένα διακριτό χρονικά χαοτικό δυναμικό σύστημα, κάθε κατάσταση προκύπτει από την χαοτική απεικόνιση της προηγούμενης κατάστασης. Για παράδειγμα, αν φανταστούμε την απεικόνιση γατών του Arnold να εφαρμόζεται σε συγκεκριμένα χρονικά σημεία, τότε οι εικόνες pixel στην εικόνα 13.3 μπορούν να αντιμετωπισθούν ως εξέλιξη ενός συγκεκριμένου χρονικά χαοτικού δυναμικού συστήματος κάποιας αρχικής διαμόρφωσης ενός συνόλου. Κάθε σημείο της γάτας είναι μια ανεξάρτητη αρχική διαμόρφωση.

Ένα από τα θεμελιώδη προβλήματα στη μελέτη των δυναμικών συστημάτων είναι να προβλέψει μελλοντικές καταστάσεις του συστήματος από μια γνωστή αρχική κατάσταση. Στη πράξη η ακριβής αρχική κατάσταση είναι σπάνια γνωστή, εξαιτίας των λαθών στις συσκευές που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της αρχικής κατάστασης. Παρατηρήθηκε ότι εάν οι μετρητές ήταν αρκετά ακριβείς και οι υπολογιστές που χρησιμοποιούνται για να εκτελέσουν τις επαναλήψεις ήταν αρκετά ισχυροί, τότε θα μπορούσαν να προβλεφθούν οι μελλοντικές καταστάσεις του συστήματος σε οποιοδήποτε βαθμό ακρίβειας. Αλλά ανακαλύφθηκε ότι τα χαοτικά συστήματα καταστρέφουν αυτήν τη πεποίθηση επειδή διαπιστώθηκε ότι για τέτοια συστήματα το ελάχιστο λάθος κατά τη μέτρηση της αρχικής κατάστασης ή κατά τους υπολογισμούς των

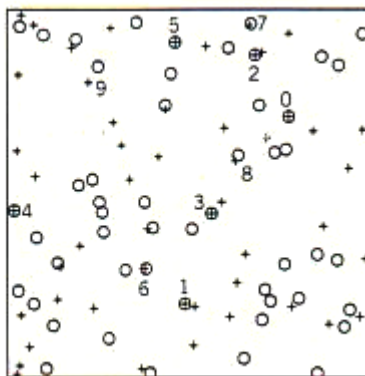
επαναλήψεων γίνεται πάρα πολύ μεγάλο (με 'εκθετική' πρόοδο), αποτρέποντας με αυτό τον τρόπο μια ακριβή πρόβλεψη των μελλοντικών διαμορφώσεων (καταστάσεων). Ας παρομοιάσουμε αυτήν την ευαισθησία στους αρχικούς όρους με την απεικόνιση γατών του Arnold.

Έστω P_0 ένα σημείο στους xy -άξονες, του οποίου οι ακριβείς συντεταγμένες είναι $(0.77837, 0.70904)$. Έστω 0.00001 ένα λάθος στις μετρήσεις στην y - συντεταγμένη, έτσι ώστε το P_0 είναι για μας το $(0.77837, 0.70905)$. Ας καλέσουμε αυτό το σημείο Q_0 . Τα P_0 και Q_0 είναι σημεία pixel με $p = 100.000$, αφού είναι της μορφής

$$(m/p, n/p) = (77.837/100.000, 70.904/100.000)$$

και έτσι, από το $\Pi(100.000) = 75.000$, τότε και τα δύο σημεία επιστρέφουν στις θέσεις τους μετά από 75.000 επαναλήψεις. Στην εικόνα 13.14, παρουσιάζουμε τις πρώτες 50 επαναλήψεις της απεικόνισης γατών του Arnold για το P_0 (συμβολίζονται με τους σταυρούς), και τις αντίστοιχες 50 πρώτες επαναλήψεις για το Q_0 (συμβολίζονται με κύκλους). Παρατηρούμε ότι τα σύμβολα των P_0 και Q_0 επικαλύπτονται αρχικά, μόνο κατά τις πρώτες οκτώ επαναλήψεις, ενώ από την ένατη επανάληψη και μετά σε κάθε επανάληψη τα σημεία ακολουθούν διαφορετικές πορείες.

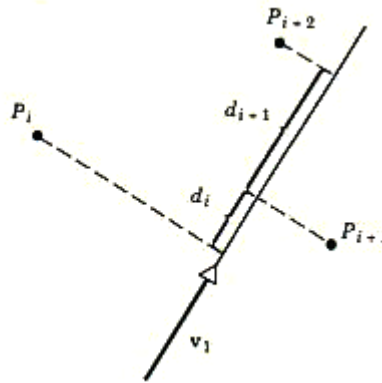
Σχήμα 13.14:



Είναι δυνατόν να υπολογίσουμε την μεταβολή (και συγκεκριμένα την αύξηση) του λάθους μέσω των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων της απεικόνισης γατών του Arnold. Για αυτό το σκοπό, ας σκεφτούμε την απεικόνιση γατών του Arnold, ως ένα γραμμικό μετασχηματισμό του πλακοστρωμένου επιπέδου. Ας θυμηθούμε την εικόνα 10 και τα όσα είχαμε πει σε εκείνο το σημείο, όπου η προβαλλομένη απόσταση μεταξύ δυο σημείων στο Σ στη

κατεύθυνση του ιδιοδιανύσματος v_1 αυξάνεται από ένα παράγοντα $2.6180(= \lambda_1)$ σε κάθε επανάληψη (εικόνα 13.15). Μετά από εννέα επαναλήψεις η προβαλλόμενη απόσταση αυξάνεται από ένα παράγοντα $(2.618)^9 = 5777.99$ με ένα αρχικό λάθος κατά προσέγγιση $1/100.000$ στη κατεύθυνση του v_1 , το οποίο ισοδυναμεί σε 0.05777 ή περίπου στο $1/17$ του πλάτους του μοναδιαίου τετράγωνου Σ . Μετά από 12 επαναλήψεις, αυτό το μικρό λάθος μεγαλώνει σε $(2.618)^{12}/100.000 = 1.0368$ το οποίο είναι μεγαλύτερο από το πλάτος του Σ . Κατά συνέπεια χάνουμε τη σωστή διαδρομή των σημείων μέσα στο Σ μετά από 12 επαναλήψεις εξαιτίας της εκθετικής αύξησης του αρχικού λάθους.

Σχήμα 13.15:



Παρόλο που η ευαισθησία στις αρχικές οριακές συνθήκες περιορίζει τη δυνατότητα να προβλεφθεί η μελλοντική εξέλιξη των δυναμικών συστημάτων, νέες τεχνικές ερευνώνται για να περιγράψουν αυτή τη μελλοντική εξέλιξη με εναλλακτικούς τρόπους.

13.10 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Βρείτε όλους τους n -κύκλους οι οποίοι είναι υποσύνολα των 36 σημείων στο Σ με τύπο $(m/6, n/6)$ με $m, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Βρείτε και την περίοδο $\Pi(6)$.

2) **Ο γεννήτορας των τυχαίων αριθμών του Fibonacci.** Μία μέθοδος δημιουργίας ακεραίων x_0, x_1, \dots από το διάστημα $[0, p-1]$ βασίζεται στον ακόλουθο αλγόριθμο.

ι) Επιλέξτε δύο ακέραιους x_0 και x_1 , από τους $0, 1, \dots, p-1$.

ii) Ορίστε την ακολουθία $x_{n+1} = (x_n + x_{n-1}) \bmod p$ για $n = 1, 2, \dots$.

α) Εφαρμόστε τον προηγούμενο αλγόριθμο για $p = 15$ με $x_0 = 3$ και $x_1 = 7$ μέχρι η ακολουθία να αρχίσει να επαναλαμβάνεται.

β) Δείξτε ότι το βήμα ι) του αλγορίθμου είναι ισοδύναμο με τον επόμενο τύπο

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \text{ mod } p.$$

γ) Εφαρμόστε τον προηγούμενο τύπο για $p = 21$, $x_0 = 5$ και $x_1 = 5$.

δ) Η ακολουθία του Fibonacci είναι εφαρμογή του προηγούμενου τύπου για $p = 1$ και $x_0 = x_1 = 1$.

3) Δείξτε ότι η απεικόνιση $T : S \rightarrow S$ με τύπο $T(x, y) = (x + 5/12, y) \text{ mod } 1$ δεν είναι χαστική.

4) Ένας αυτομορφισμός του Anosov είναι μία απεικόνιση του S στον εαυτό του με τύπο

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mod } 1$$

όπου i) a, b, c, d είναι ακέραιοι, ii) η ορίζουσα του πίνακα είναι -1 και iii) τα ιδιοδιανύσματα δεν έχουν μήκος ένα.

Δείξτε ότι η απεικόνιση του Arnold είναι αυτομορφισμός του Anosov.

Βρείτε ποιοι πίνακες ορίζουν αυτομορφισμούς του Anosov.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

5) Δείξτε ότι η απεικόνιση του Arnold είναι 1-1 και επί και βρείτε την αντίστροφή της.

6) Βρείτε όλους τους 2-κύκλους της απεικόνισης του Arnold και δείξτε ότι όλα τα περιοδικά σημεία είναι ζεύγη ρητών.

Κεφάλαιο 14

FRACTALS

Ένα μεγάλο μέρος της μαθηματικής και επιστημονικής έρευνας είναι εστιασμένο στη μελέτη πολύπλοκων συνόλων τα οποία ονομάζονται **fractals**.

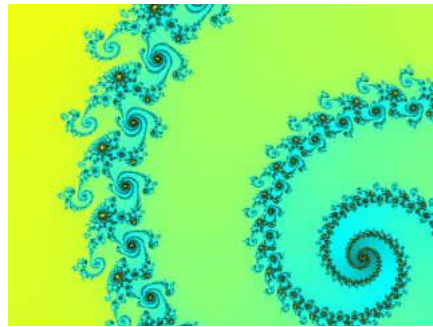
Η γεωμετρία των fractals και τα χαοτικά δυναμικά συστήματα έχουν αλλάξει τον τρόπο με τον οποίο βλέπουμε τη φύση και τα φυσικά φαινόμενα. Σε κάθε θετική επιστήμη υπάρχουν εφαρμογές αυτών των δύο κλάδων. Οι ιδέες στις οποίες στηρίζονται δεν είναι νέες, αλλά για την επαλήθευσή τους η ταχύτητα των ηλεκτρονικών υπολογιστών είναι σημαντική. Γι' αυτό το λόγο η ανάπτυξή τους είναι ραγδαία από το 1980 .

Τις βασικές αρχές των fractals τις είχε επισημάνει ο Hausdorff ήδη από το 1900. Πατέρας όμως των fractals θεωρείται ο Benoit Mandelbrot ο οποίος συστηματοποίησε και μελέτησε αυτήν την περιοχή ([6]).

Θα μελετήσουμε εισαγωγικές έννοιες των συνόλων αυτών χρησιμοποιώντας ορισμένες κατηγορίες γραμμικών μετασχηματισμών. Θα περιοριστούμε στο επίπεδο και στα κλασικά γραμμικά παραδείγματα. Έχουμε δανειστεί το στυλ και τα σχήματα από τους Torres & Anton.

Στο τέλος του 19ου αιώνα και στις αρχές του 20ου , διάφορα παράξενα σύνολα σημείων στο Ευκλείδειο επίπεδο άρχισαν να εμφανίζονται στο προσκήνιο. Αν και ήταν αρχικά μαθηματικά περίεργα, αυτά τα σύνολα, αποκαλούμενα **fractals**, έχουν αποκτήσει μεγάλη σημασία. Τώρα πλέον φαίνεται πως αποκαλύπτουν την τακτικότητα στα φυσικά & βιολογικά φαινόμενα που πριν απορρίπτονταν ως 'τυχαία,' 'θορυβώδη,' ή 'χαοτικά.' Τα fractals υπάρχουν στη φύση ή δημιουργούνται με μία μαθηματική συνταγή όπως στο επόμενο παράδειγμα.

Σχήμα 14.1: fractals



14.1 Σύνολα όμοια με τον εαυτό τους 'Αυτοόμοια'

Για να αρχίσουμε τη μελέτη των fractals, πρέπει να υπενθυμίσουμε κάποιες γνωστές έννοιες για τα υποσύνολα του \mathbf{R}^2 .

Ορισμός 119 Θα καλούμε ένα υποσύνολο A του \mathbf{R}^2 **φραγμένο**, εάν ένας κατάλληλα μεγάλος κύκλος (εικόνα 14.2(α')) μπορεί να το εσωκλείσει και **κλειστό** εάν περιέχει όλα τα συνοριακά σημεία του.

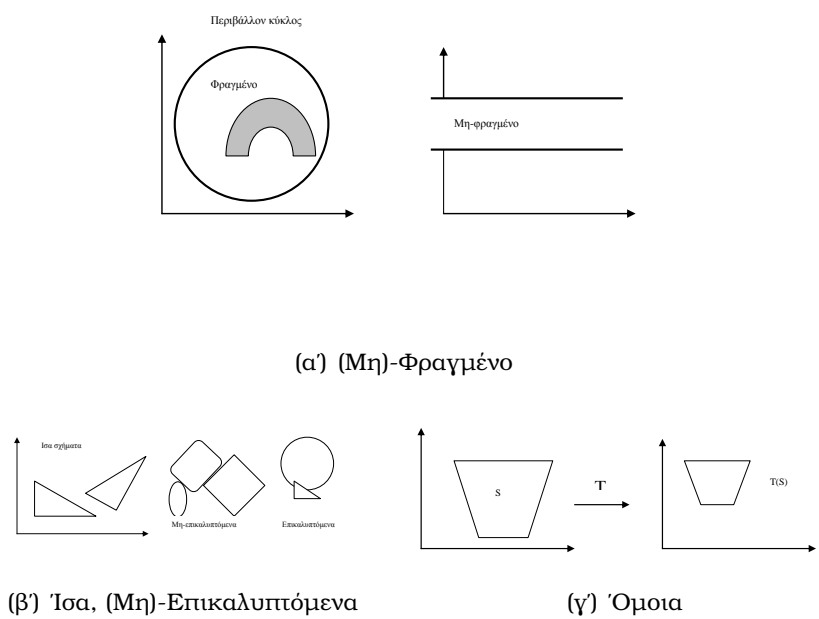
Ορισμός 120 Δύο υποσύνολα του \mathbf{R}^2 θα καλούνται **ίσα**, εάν μπορούν να συμπέσουν ακριβώς το ένα πάνω στο άλλο με μεταφορά ή και περιστροφή μέσα στον \mathbf{R}^2 (εικόνα 14.2(β')).

Θα στηριχθούμε επίσης στη διαισθητική μας έννοια των **επικαλυπτόμενων** και μη-επικαλυπτόμενων συνόλων, όπως αυτά φαίνονται στην εικόνα 14.2(β).

Ορισμός 121 Έστω

$$T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

γραμμικός μετασχηματισμός που μεγενθύνει (πολ/ζει) κατά ένα παράγοντα s . Έστω Q ένα υποσύνολο του \mathbf{R}^2 , τότε το υποσύνολο $T(Q)$ (η εικόνα του X μέσω



(α) (Μη)-Φραγμένο

(β) Ίσα, (Μη)-Επικαλυπτόμενα

(γ) Όμοια

Σχήμα 14.2:

του T) καλείται **διαστολή** του αρχικού X , αν $s > 1$ και **συστολή** αν $0 < s < 1$ (εικόνα 14.2(γ')). Σε καθεμία περίπτωση λέμε ότι το $T(Q)$ είναι το υποσύνολο Q που έχει μεγεθυνθεί μέσω του συντελεστή s . Το s καλείται συντελεστής μεγέθυνσης κλίμακας. Τα X και $T(X)$ είναι **όμοια** μεταξύ τους και **ίσα** αν $s = 1$.

Οι τύποι fractals που θα εξετάσουμε είναι σύνολα όμοια με τον εαυτό τους. Γενικά, ορίζουμε ένα όμοιο με τον εαυτό του υποσύνολο του ως εξής:

Ορισμός 122 Ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο S του \mathbf{R}^2 λέγεται αυτοόμοιο ή όμοιο με τον εαυτό του εάν μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$(14.1) \quad S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$$

Εδώ τα S_1, S_2, \dots, S_k είναι μη-επικαλυπτόμενα σύνολα, καθένα από τα οποία είναι όμοιο με το S και μεγενθυμένα μέσω μιας συστολής με τον ίδιο συντελεστή s ($0 < s < 1$).

Παράδειγμα 123 Ευθύγραμμο Τμήμα. Ένα Ευθύγραμμο Τμήμα στον \mathbf{R}^2 (εικόνα 14.3) μπορεί να εκφραστεί ως ένωση δύο μη-επικαλυπτόμενων ευθύγραμμων τμημάτων. Στην εικόνα 6 έχουμε χωρίσει τα δύο ευθύγραμμο τμήματα ελαφρώς έτσι ώστε να μπορούν να φανούν ευκολότερα. Καθένα από τα

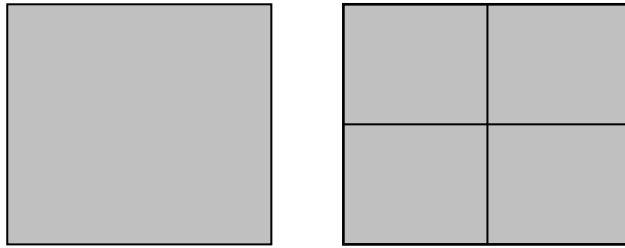
2 μικρότερα ευθύγραμμα τμήματα είναι όμοιο με το αρχικό μεγενθυμένο με ένα συντελεστή $\frac{1}{2}$. Ως εκ τούτου, ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι ένα αυτοόμοιο σύνολο με $k = 2$ και $s = 1/2$.

Σχήμα 14.3: Ευθύγραμμο Τμήμα.



Παράδειγμα 124 Τετράγωνο. Ένα τετράγωνο (εικόνα 14.4) μπορεί να εκφραστεί ως ένωση τεσσάρων μη-επικαλυπτόμενων όμοιων τετραγώνων.

Σχήμα 14.4: Τετράγωνο.

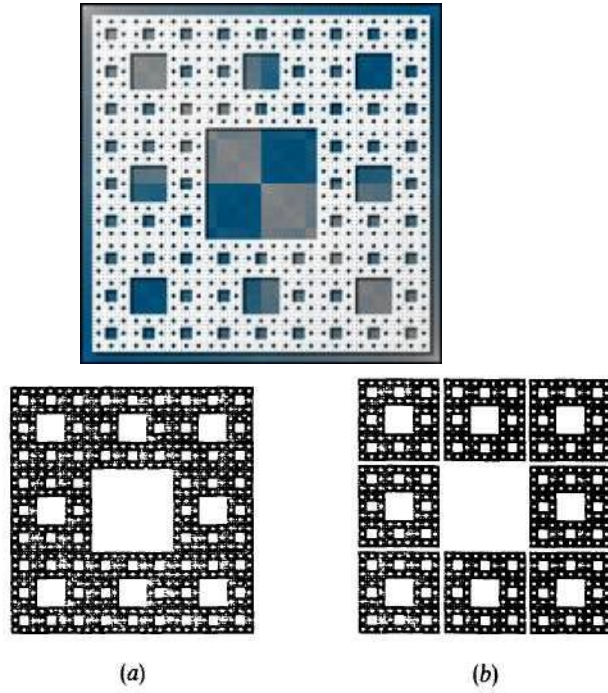


Κάθε ένα από τα τέσσερα μικρότερα τετράγωνα είναι όμοιο με το αρχικό τετράγωνο το οποίο έχει μεγεθυνθεί κατά ένα παράγοντα ίσο με $1/2$. Ως εκ τούτου, ένα τετράγωνο είναι ένα αυτοόμοιο σύνολο με $k = 4$ και $s = 1/2$.

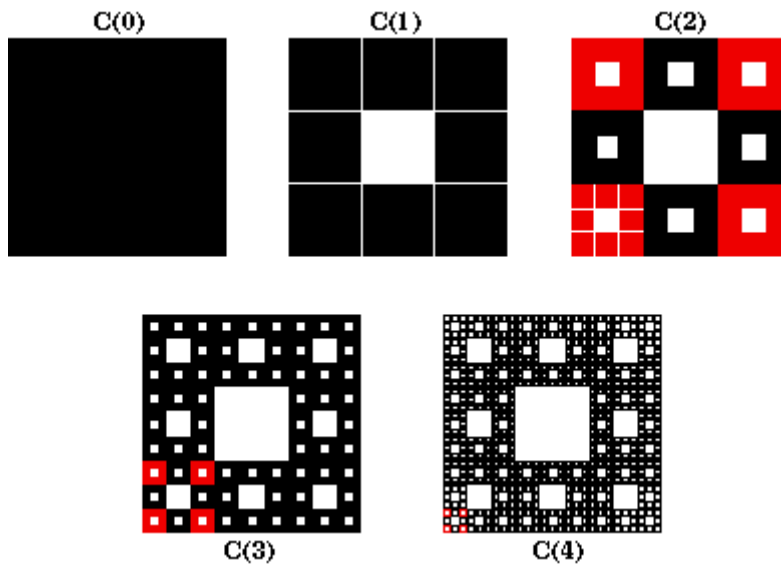
Παράδειγμα 125 Το χαλί του Sierpinski. Το σύνολο που φαίνεται στην εικόνα 14.5 α περιγράφηκε αρχικά από τον πολωνό μαθηματικό Wacław Sierpinski (1882-1969). Μπορεί να εκφραστεί ως ένωση οκτώ μη-επικαλυπτόμενων όμοιων υποσυνόλων (εικόνα 14.5 β), κάθε ένα από τα οποία είναι όμοιο με το αρχικό σύνολο μεγενθυμένο κατά ένα παράγοντα $1/3$. Ως εκ τούτου, είναι ένα αυτοόμοιο σύνολο με $k = 8$ και $s = 1/3$. Παρατηρούμε ότι το περίπλοκο σχήμα της μορφής τετράγωνο - μέσα - στο-τετράγωνο συνεχίζεται στο άπειρο με μια μικρότερη και μικρότερη κλίμακα. Φυσικά αυτό μπορεί να παρουσιαστεί μόνο ως ένα βαθμό όπως στην εικόνα που φαίνεται παρακάτω.

Η εικόνα 14.6 δείχνει τη δημιουργία του.

Σχήμα 14.5: Sierpinski

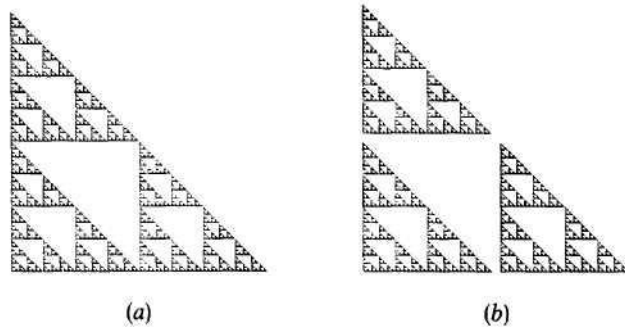


Σχήμα 14.6: Δημιουργία Sierpinski.



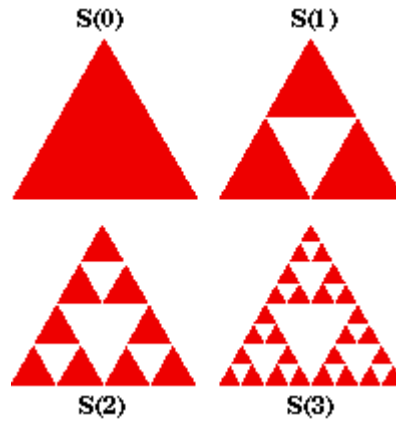
Παράδειγμα 126 Τρίγωνο Sierpinski. Η εικόνα 14.7 παρουσιάζει ένα άβηλο σύνολο του Sierpinski. Είναι ένα αυτοόμοιο σύνολο με $k = 3$ και $s = 1/2$. Όπως με το χαλί του Sierpinski, το περίπλοκο σχήμα της μορφής τρίγωνο - μέσα -στο-τρίγωνο συνεχίζεται για πάντα σε μια μικρότερη και μικρότερη κλίμακα.

Σχήμα 14.7: Τρίγωνο Sierpinski



Η επόμενη εικόνα δείχνει τη δημιουργία του.

Σχήμα 14.8: Δημιουργία Sierpinski



Τα δύο τελευταία παραδείγματα, δηλαδή το χαλί και το τρίγωνο του Sierpinski έχουν μια πιο περίπλοκη δομή από τα δύο πρώτα παραδείγματα (το ευθύγραμμο τμήμα και το τετράγωνο), δεδομένου ότι παρουσιάζουν ένα σχήμα που επαναλαμβάνεται κατά τρόπο αόριστο. Αυτή η διαφορά είναι ουσιώδης και θα τη μελετήσουμε περισσότερο.

14.2 Τοπολογική διάσταση ενός υποσυνόλου του επιπέδου

Έχουμε ορίσει τη διάσταση ενός υποχώρου ενός διανυσματικού χώρου να είναι ο αριθμός των διανυσμάτων μιας βάσης του. Ένας ανάλογος αλλά πολύ πιο δύσκολος ορισμός αυτής της έννοιας μελετάται και στην γενική τοπολογία. Αν και αυτός ο ορισμός είναι πέρα από το σκοπό αυτού του εισαγωγικού κειμένου, μπορούμε να πούμε με απλά λόγια ότι:

Ορισμός 127 Ένα σημείο στον \mathbf{R}^2 έχει τοπολογική διάσταση μηδέν.

Μια καμπύλη στον \mathbf{R}^2 έχει τοπολογική διάσταση ένα.

Μια περιοχή στον \mathbf{R}^2 έχει τοπολογική διάσταση δύο.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η τοπολογική διάσταση ενός υποσυνόλου στον \mathbf{R}^n είναι ένας ακέραιος αριθμός μεταξύ 0 και n .

Εδώ θα συμβολίζουμε την τοπολογική διάσταση ενός υποσυνόλου S με

$$d_T(S)$$

Για μια πλήρη ανάπτυξη της έννοιας της διάστασης, βλέπε Munkres, *A first course in Topology*.

Σχόλιο 128 Ο ακόλουθος πίνακας δίνει τις τοπολογικές διαστάσεις των συνόλων που μελετήθηκαν στα προηγούμενα παραδείγματά μας

S	$d_T(S)$
Ευθύγραμμο Τμήμα	1
T	2
Χαλί του Sierpinski	1
Τρίγωνο Sierpinski	1

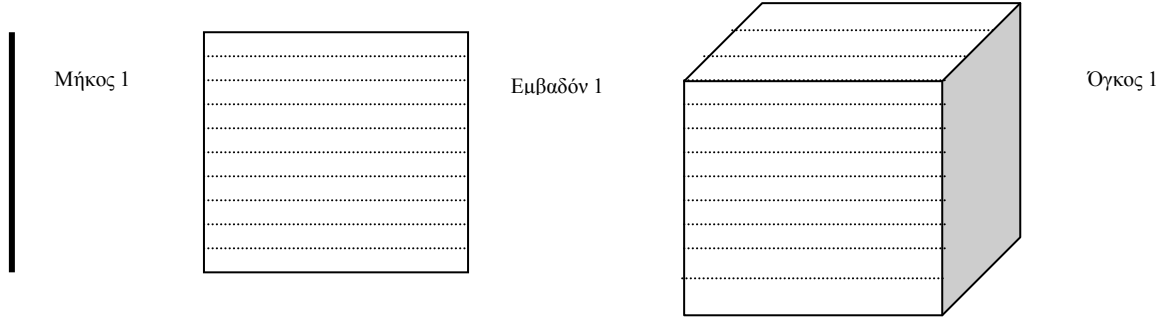
Τα πρώτα δύο αποτελέσματα σε αυτόν τον πίνακα είναι προφανή. Εντούτοις, τα δύο τελευταία δεν είναι. Μπορούμε ανεπίσημα να πούμε, ότι το χαλί και το τρίγωνο του Sierpinski περιέχουν τόσες πολλές 'ρύπες' που καταλήγουν να μοιάζουν πιο πολύ ως ιστός από δίκτυα γραμμών παρά ως περιοχές του \mathbf{R}^2 , οι οποίες περιέχουν τουλάχιστον έναν γεμάτο κύκλο οσοδήποτε μικρής ακτίνας. Ως εκ τούτου έχουν τοπολογική διάσταση ένα.

14.3 Διάσταση Hausdorff ενός αυτοόμοιου συνόλου

Όσο κι αν φαίνεται περίεργο, η έννοια της διάστασης σχετίζεται με αυτήν της μεγένθυσης ή σμικρύνσης. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ευθύγραμμο

τμήμα, μία επιφάνεια, και ένα στερεό τα οποία είναι αυτοόμοια με μικρότερα και η μία διάσταση τους έχει μήκος s .

Σχήμα 14.9:



Προς διευκόλυνση υποθέτουμε ότι το μήκος M , η επιφάνεια E , και ο όγκος O είναι ίσα με μία μονάδα.

Ας δούμε πρώτα το ευθύγραμμο τμήμα. Αν αυτό διαιρείται σε k μικρότερα αυτοόμοια τμήματα με μήκος s , τότε το s είναι και ο αριθμός σμίκρυνσης:

$$\frac{s}{k} = \frac{s}{1} = s$$

Άρα

$$M = ks = 1$$

Ας κάνουμε το ίδιο για το τετράγωνο, το οποίο έχει διαιρεθεί σε k αυτοομοία τετράγωνα εμβαδού s^2 . Άρα

$$E = ks^2 = 1$$

Επίσης για τον κύβο έχουμε

$$O = ks^3 = 1$$

Παρατηρούμε ότι ο εκθέτης του s στους προηγούμενους τύπους δίνει ένα μέτρο διάστασης του αντικειμένου. Γενικά

$$ks^{d_H(S)} = 1$$

Άρα

$$d_H(S) = \frac{\ln(k)}{\ln(1/s)}$$

Αυτός είναι ο ορισμός που έδωσε το 1919 ο γερμανός μαθηματικός Felix Hausdorff (1868-1942) για τη διάσταση ενός αυθαίρετου υποσυνόλου στον \mathbf{R}^2 . Ο ορισμός του είναι αρκετά περίπλοκος, αλλά για ένα αυτοόμοιο σύνολο που θα μας απασχολήσει σαυτή τη μελέτη απλουστεύεται αρκετά:

Ορισμός 129 Η διάσταση Hausdorff ενός όμοιου με τον εαυτό του συνόλου S της μορφής 14.1 συμβολίζεται με $d_H(S)$ και ορίζεται ως:

$$(14.2) \quad d_H(S) = \frac{\ln(k)}{\ln(1/s)}$$

Εδώ k είναι το πλήθος των συνόλων της σχέσης 14.1 και s ο συντελεστής μεγέθυνσης.

Σε αυτόν τον ορισμό το \ln συμβολίζει τον φυσικό λογάριθμο. Η εξίσωση 14.2 μπορεί επίσης να γραφεί ως:

$$(14.3) \quad s^{d_H(S)} = \frac{1}{k}$$

όπου η διάσταση Hausdorff εμφανίζεται ως εκθέτης.

Πριν προχωρήσουμε σε μερικά παραδείγματα, θα αναφέρουμε μερικές ιδιότητες για τη διάσταση Hausdorff ενός συνόλου:

Σχόλιο 130 Η τοπολογική διάσταση και διάσταση Hausdorff ενός συνόλου δεν είναι κατ' ανάγκη ίσες.

Η διάσταση Hausdorff ενός συνόλου δεν είναι κατ' ανάγκην ακέραιος.

Η τοπολογική διάσταση ενός συνόλου είναι μικρότερη ή ίση από τη διάσταση Hausdorff, δηλαδή

$$d_T(S) \leq d_H(S)$$

Ο επόμενος πίνακας εμφανίζει τις διαστάσεις Hausdorff των συνόλων που μελετήθηκαν στα προηγούμενα παραδείγματά μας:

S	s	k	$\ln k / \ln(1/s)$
Ευθ.	1/2	2	1
T	1/2	4	2
Χαλί Sierpinski	1/2	8	3
Τρίγωνο Sierpinski	1/2	3	$\ln 3 / \ln 2$

14.4 Fractals

Συγκρίνοντας τους προηγούμενους πίνακες, βλέπουμε ότι Hausdorff και τοπολογικές διαστάσεις είναι ίσες για το ευθύγραμμο τμήμα και για το τετράγωνο, αλλά άνισες για το χαλί και το τρίγωνο του Sierpinski. Το 1977 ο Benoit B. Mandelbrot πρότεινε ότι τα σύνολα για τα οποία η τοπολογική και η Hausdorff διαστάσεις διαφέρουν, πρέπει να είναι αρκετά περίπλοκα (όπως ο Hausdorff είχε προτείνει νωρίτερα το 1919). Ο Mandelbrot ονόμασε αυτά τα σύνολα fractals και πρότεινε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 131 *Fractal* είναι ένα υποσύνολο ενός Ευκλείδειου χώρου του οποίου η διάσταση Hausdorff και η τοπολογική δεν είναι ίσες.

Ο Mandelbrot έχει σχολιάσει ότι αυτός ο ορισμός είναι περιορισμένος και πιθανώς να αντικατασταθεί στο μέλλον. Αλλά στο μεταξύ, παραμένει ο επίσημος ορισμός ενός fractal.

Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό το χαλί και το τρίγωνο του Sierpinski είναι fractals, ενώ το ευθύγραμμο τμήμα και το τετράγωνο δεν είναι.

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι ένα σύνολο του οποίου η διάσταση Hausdorff δεν είναι ακέραιος αριθμός, είναι fractal. Εντούτοις, θα δούμε αργότερα ότι το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή είναι δυνατό ένα fractal να έχει ακέραια διάσταση Hausdorff.

14.5 Ομοιότητες

Θα δείξουμε τώρα πώς μερικές τεχνικές από τη γραμμική άλγεβρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να παραγάγουν fractals. Αυτή η προσέγγιση μέσω γραμμικής άλγεβρας οδηγεί επίσης στους αλγόριθμους που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δημιουργήσουν fractals με την βοήθεια ενός υπολογιστή. Αρχίζουμε με έναν ορισμό.

Ορισμός 132 Μια *ομοιότητα* με συντελεστή μεγέθυνσης s είναι μια απεικόνιση της μορφής:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

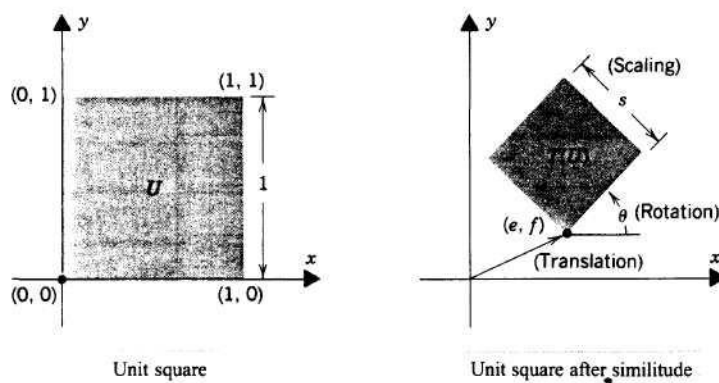
Εδώ s , θ , e και f είναι σταθεροί συντελεστές.

Γεωμετρικά, μια ομοιότητα είναι μια σύνθεση τριών απλούστερων απεικονίσεων: μιας μεγέθυνσης μέσω ενός παράγοντα s , μιας στροφής κατά γωνία θ , και μιας παρ/λης μεταφοράς. Η επόμενη εικόνα 14.10 επεξηγεί την επίδραση μιας ομοιότητας πάνω στο τετράγωνο U .

Για την προσέγγιση μας στα fractals θα χρειαστούμε μόνο τις ομοιότητες που είναι συστολές, δηλαδή ο παράγοντας μεγέθυνσης s είναι $0 < s < 1$. Συνεπώς, όταν αναφερόμαστε στις ομοιότητες θα εννοούμε πάντα τις ομοιότητες υποκείμενες σε αυτόν τον περιορισμό.

Οι ομοιότητες είναι σημαντικές στη μελέτη των fractals λόγω της ακόλουθης πρότασης:

Σχήμα 14.10: Ομοιότητα



Πρόταση 133 Εάν $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ είναι μια ομοιότητα με παράγοντα μεγέθυνσης s και το S να είναι ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του, τότε η εικόνα $T(S)$ του υποσύνολου S μέσω της T είναι όμοια με το S μεγειθυμένο κατά τον παράγοντα s .

Παράδειγμα 134 Ευθύγραμμο τμήμα. Θα πάρουμε ως ευθύγραμμο τμήμα το τμήμα Σ που συνδέει τα σημεία $(0, 0)$ και $(1, 0)$ στο επίπεδο OXU (εικόνα 11). Ας εξετάσουμε τις δύο ομοιότητες:

$$T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

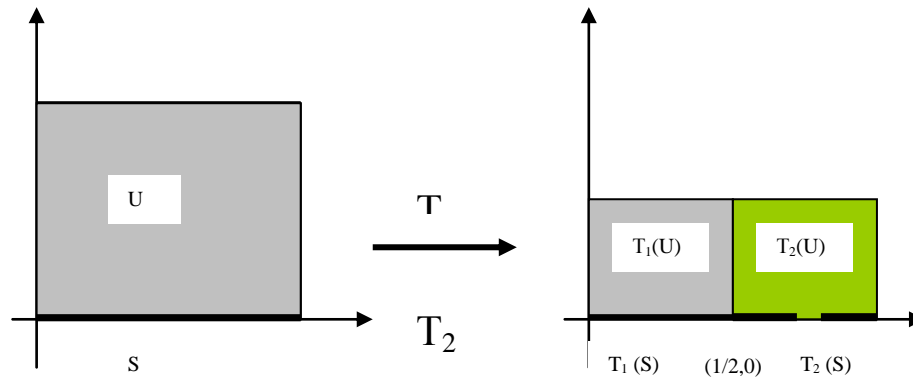
$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Και οι δύο έχουν $s = 1/2$ και $\theta = 0$. Στην εικόνα 14.11 φαίνεται τι κάνουν αυτές οι δύο ομοιότητες στο μοναδιαίο τετράγωνο U . Η ομοιότητα T_1 στέλνει το U στο μικρότερο τετράγωνο $T_1(U)$, και η T_2 στέλνει το U στο μικρότερο τετράγωνο $T_2(U)$. Συγχρόνως, το T_1 απεικονίζει το ευθύγραμμο τμήμα S στο μικρότερο ευθύγραμμο τμήμα $T_1(S)$ και η T_2 απεικονίζει το S στο μικρότερο μη-επικαλυπτόμενο ευθύγραμμο τμήμα $T_2(S)$. Η ένωση αυτών των δύο μικρότερων μη-επικαλυπτόμενων ευθυγράμμων τμημάτων είναι ακριβώς το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα Σ , δηλαδή :

$$S = T_1(S) \cup T_2(S)$$

Παράδειγμα 135 Τετράγωνο. Ας εξετάσουμε το μοναδιαίο τετράγωνο U στο OXU επίπεδο και τις ακόλουθες τέσσερις ομοιότητες, που έχουν όλες $s = 1/2$

Σχήμα 14.11: ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ



και $\vartheta=0$:

$$(14.4) \quad \begin{aligned} T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ T_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ T_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Οι εικόνες του μοναδιαίου τετραγώνου με αυτές τις τέσσερις ομοιότητες είναι τα τέσσερα τετράγωνα που παρουσιάζονται στην εικόνα 14.12 και άρα το U :

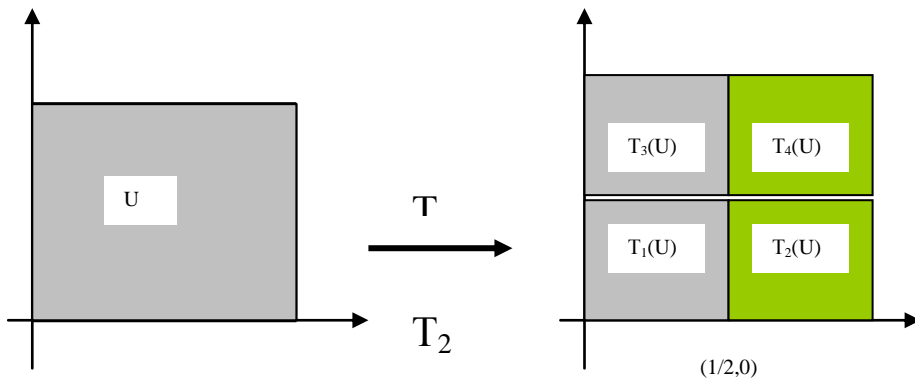
$$(14.5) \quad U = T_1(U) \cup T_2(U) \cup T_3(U) \cup T_4(U)$$

είναι ένας διαχωρισμός σε τέσσερα μη-επικαλυπτόμενα τετράγωνα που είναι όμοια με το U .

Παράδειγμα 136 Τάπητας Sierpinski. Ας εξετάσουμε το χαλί του Sierpinski, S , πάνω στο μοναδιαίο τετράγωνο U του OXU επιπέδου (εικόνα 14.13) και τις ακόλουθες οκτώ ομοιότητες, που όλες έχουν $s = 1/3$ και $\vartheta = 0$:

$$(14.6) \quad T_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, 8$$

Σχήμα 14.12:

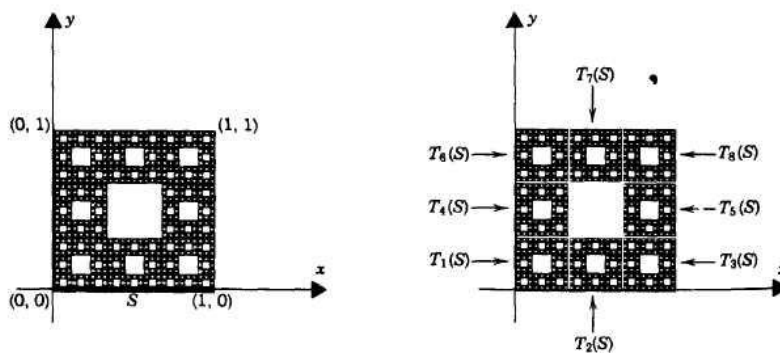


Εδώ οι τιμές των 8 $(e_i, f_i)^t$ είναι

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Οι εικόνες του Σ μέσω αυτών των οκτώ ομοιοτήτων είναι τα οκτώ σύνολα που παρουσιάζονται στην εικόνα 14.13. Άρα το $S = \bigcup_{i=1}^8 T_i(S)$ είναι ένας διαχωρισμός του Σ σε οκτώ μη-επικαλυπτόμενα σύνολα που είναι όμοια με το Σ με τον ίδιο παράγοντα μεγέθυνσης $s = 1/3$.

Σχήμα 14.13: Τάπητας Sierpinski

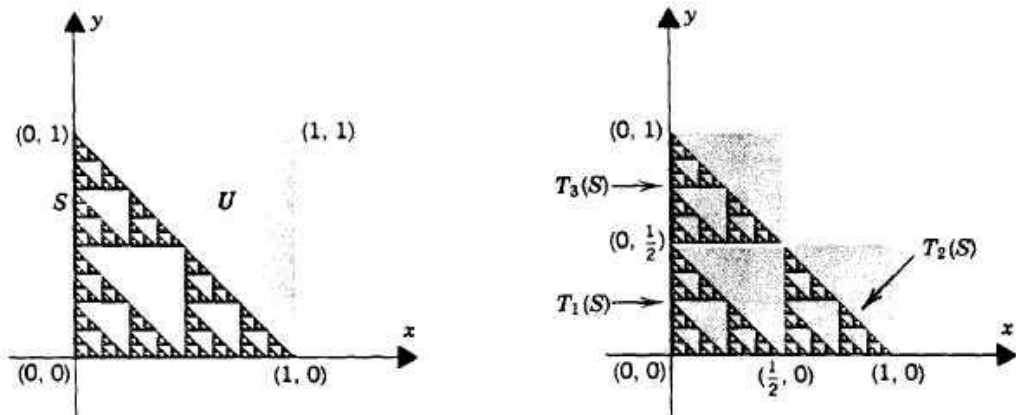


Παράδειγμα 137 Τρίγωνο Sierpinski. Θεωρήστε ένα τρίγωνο του Sierpinski Σ που βρίσκεται μέσα στο μοναδιαίο τετράγωνο U , όπως φαίνεται στην εικόνα 14.14, και τις ακόλουθες τρεις ομοιότητες, που όλες έχουν $s = 1/2$ και $\theta = 0$:

$$(14.7) \quad \begin{aligned} T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ T_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Οι εικόνες του Σ μέσω αυτών των τριών ομοιοτήτων είναι τα τρία σύνολα όπως φαίνονται στην εικόνα 14.14. Άρα το $S = \bigcup_{i=1}^3 T_i(S)$ είναι ένας διαχωρισμός του Σ σε τρία μη-επικαλυπτόμενα σύνολα που είναι όμοια με το Σ με τον ίδιο παράγοντα μεγέθυνσης.

Σχήμα 14.14:



Στα προηγούμενα παραδείγματα αρχίσαμε με ένα συγκεκριμένο σύνολο Σ και δείξαμε ότι είναι αυτοόμοιο βρίσκοντας ομοιότητες με τον ίδιο παράγοντα s έτσι ώστε τα σύνολα να είναι μη-επικαλυπτόμενα, και:

$$(14.8) \quad S = \bigcup_{i=1}^k T_i(S)$$

Το ακόλουθο θεώρημα εξετάζει το αντίστροφο πρόβλημα, της εύρεσης ενός όμοιου με τον εαυτό του συνόλου από μια συλλογή ομοιοτήτων:

Θεώρημα 138 *Εάν T_1, T_2, \dots, T_k είναι ομοιότητες με τον ίδιο παράγοντα μεγέθυνσης s , τότε υπάρχει μοναδικό μη-κενό, κλειστό και φραγμένο σύνολο S τέτοιο ώστε*

$$S = \bigcup_{i=1}^k T_i(S)$$

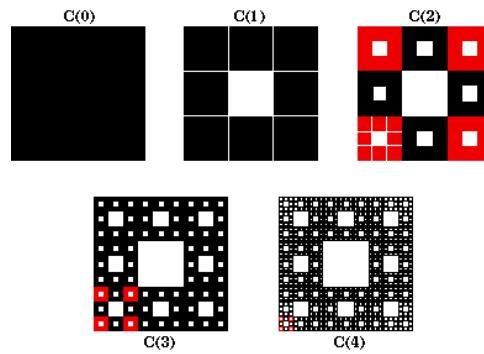
Επιπλέον, εάν τα σύνολα $T_i(S)$ για $i = 1, 2, \dots, k$ είναι μη-επικαλυπτόμενα μεταξύ τους, τότε το S είναι αυτοόμοιο σύνολο.

14.6 Αλγόριθμοι για παραγωγή fractals

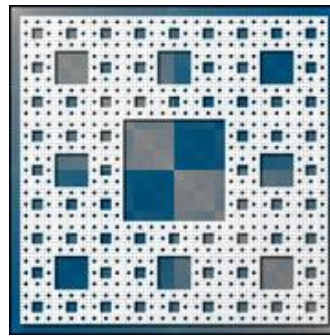
Γενικά, δεν υπάρχει απλός τρόπος να ληφθεί το σύνολο S του προηγούμενου θεωρήματος άμεσα. Περιγράφουμε τώρα μια επαναληπτική μέθοδο που θα προσδιορίσει το S από τις ομοιότητες που το καθορίζουν. Δίνουμε αρχικά ένα παράδειγμα της διαδικασίας και δίνουμε έπειτα έναν αλγόριθμο για τη γενικότερη περίπτωση.

Παράδειγμα 139 Τάπητας Sierpinski. *Η εικόνα 14.15(a') δείχνει το μοναδιαίο τετράγωνο S στον \mathbf{R}^2 , το οποίο θα μας βοηθήσει ως ένα 'αρχικό' σύνολο σε μια επαναληπτική μέθοδο για την κατασκευή του τάπητα του Sierpinski. Το σύνολο $C(1)$ στην εικόνα είναι το αποτέλεσμα των οκτώ ομοιοτήτων T_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) της σχέσης 14.6 που καθορίζουν τον τάπητα του Sierpinski όταν εφαρμοστούν στο $C(0)$. Αποτελείται από οκτώ τετράγωνα, κάθε ένα από τα οποία έχει μήκος πλευράς $1/3$ και όλα συνολικά περιβάλλουν ένα κενό τετράγωνο στη μέση. Εφαρμόζουμε έπειτα τις οκτώ ομοιότητες στο $C(1)$ και παίρνουμε το σύνολο $C(2)$. Ομοίως, εφαρμόζοντας τις οκτώ ομοιότητες στο $C(2)$ παίρνουμε το σύνολο $C(3)$. Αν συνεχίσουμε αυτήν την διαδικασία επ' άπειρον, η ακολουθία συνόλων $C(1), C(2), C(3), C(4), \dots$ 'θα συγκλίνει' στο σύνολο S , το οποίο είναι ο τάπητας του Sierpinski.*

Αν και αρχίσαμε στην εικόνα 14.15 με το μοναδιαίο τετράγωνο, για να φθάσουμε στον τάπητα του Sierpinski, θα μπορούσαμε να έχουμε αρχίσει με οποιοδήποτε μη κενό σύνολο S_0 . Ο μόνος περιορισμός είναι το σύνολο S_0 να είναι κλειστό και φραγμένο. Παραδείγματος χάριν, εάν αρχίζαμε με το σύνολο S_0 που παρουσιάζεται στην εικόνα 14.16, τότε S_1 είναι το σύνολο που λαμβάνεται αν εφαρμοστούν κάθε μία από τις οκτώ ομοιότητες. Εφαρμόζοντας τις 8 ομοιότητες στο S_1 θα πάρουμε το σύνολο S_2 . Όπως και πριν, εφαρμόζοντας τις οκτώ ομοιότητες επ' άπειρον, παίρνουμε το χαλί του Sierpinski ως οριακό σύνολο ([8]).



(α')

Τάπητας Sierpinski Σ

(β') Όριο

Σχήμα 14.15: Τάπητας Sierpinski διαδικασία σύγκλισης.

Ο γενικός αλγόριθμος που περιγράφεται στο προηγούμενο παράδειγμα είναι ο ακόλουθος: Ας είναι T_1, T_2, \dots, T_k οι συμβαλλόμενες ομοιότητες με ίδιο παράγοντα μεγέθυνσης s . Για ένα αυθαίρετο σύνολο Q στον \mathbb{R}^2 ορίζουμε το σύνολο $J(Q)$ ως:

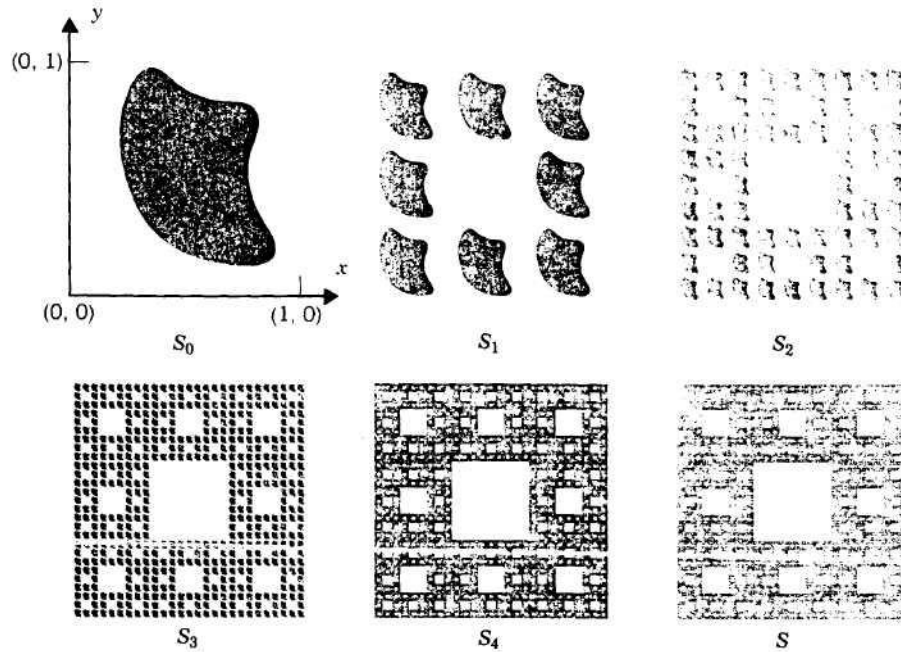
$$J(Q) = \bigcup_{i=1}^k T_i(Q)$$

Ο ακόλουθος αλγόριθμος παράγει μια ακολουθία συνόλων S_0, S_1, \dots που συγκλίνει στο σύνολο S του προηγούμενου θεωρήματος.

Αλγόριθμος 1:

Βήμα 0: Επιλέγουμε ένα αυθαίρετο μη κενό, κλειστό και φραγμένο σύνολο S_0 του \mathbb{R}^2 .

Σχήμα 14.16: Τυχαία σύνολα.



Βήμα 1: Κατασκευάζουμε το $S_1 = J(S_0)$.

Βήμα 2: Κατασκευάζουμε το $S_2 = J(S_1)$.

⋮

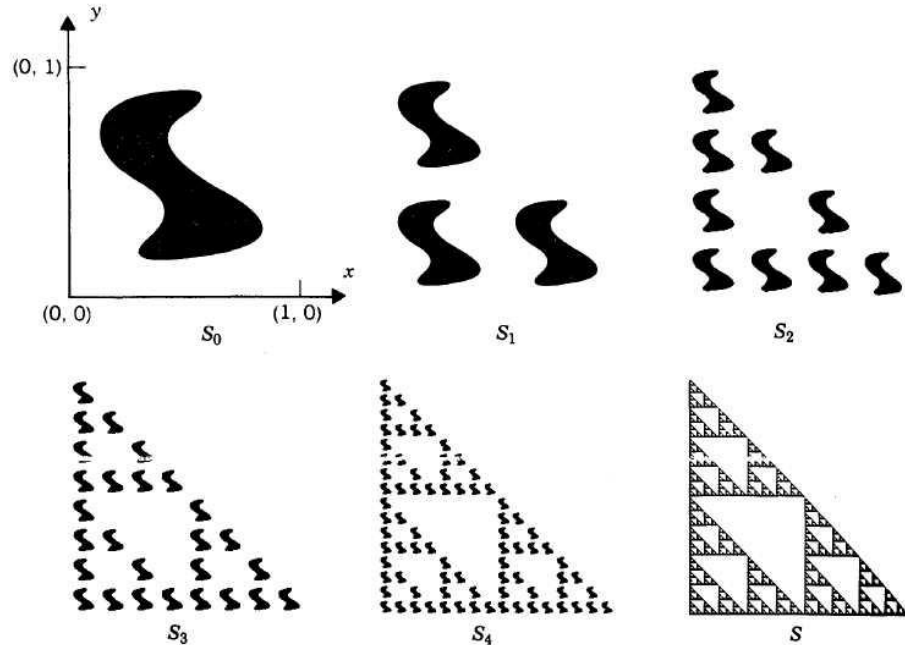
Βήμα n: Κατασκευάζουμε το $S_n = J(S_{n-1})$.

⋮

Παράδειγμα 140 Τρίγωνο Sierpinski. Ας κατασκευάσουμε το τρίγωνο του Sierpinski που καθορίζεται από τις τρεις ομοιότητες που δίνονται στη σχέση 14.7 και το αντίστοιχο γράφημα του συνόλου $J(Q) = \bigcup_{i=1}^3 T_i(Q)$. Η εικόνα 14.17 δείχνει ένα αυθαίρετο κλειστό και φραγμένο σύνολο S_0 , τις πρώτες τέσσερις επαναλήψεις S_1, S_2, S_3, S_4 και το οριακό σύνολο S , δηλαδή το τρίγωνο Sierpinski:

Ας δούμε και έναν άλλο τρόπο δημιουργίας fractal χρησιμοποιώντας την γωνία της στροφής που υπεισέρχεται στην ομοιότητα.

Σχήμα 14.17: Τυχαία σύνολα.



Παράδειγμα 141 Εξετάστε τις ακόλουθες δύο ομοιότητες:

$$T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

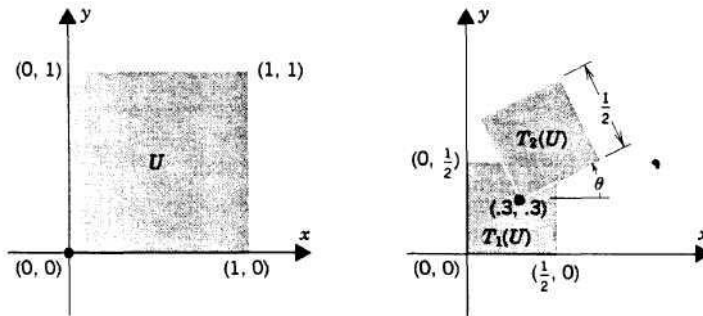
$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

Το τι κάνουν αυτές οι δύο ομοιότητες στο μοναδιαίο τετράγωνο U διευκρινίζεται στην εικόνα 14.18.

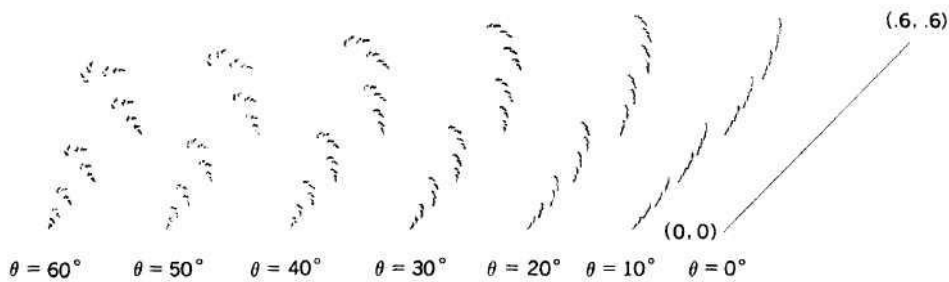
Εδώ, η γωνία περιστροφής θ είναι μια παράμετρος που θα αλλάζουμε για να παραγάγουμε τα διάφορα αυτοόμοια σύνολα. Τα αυτοόμοια σύνολα που καθορίζονται από αυτές τις δύο ομοιότητες εμφανίζονται στην εικόνα 14.19 για τις διάφορες τιμές του θ .

Για απλότητα, δεν έχουμε σχεδιάσει τους άξονες xy , αλλά σε κάθε περίπτωση η αρχή των αξόνων είναι το κάτω αριστερό σημείο του συνόλου. Αυτά τα σύνολα δημιουργήθηκαν με τη βοήθεια ενός υπολογιστή χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο αλγόριθμο για τις διάφορες τιμές του θ . Επειδή $k = 2$ και $s = 1/2$, προκύπτει από τη σχέση 14.2 ότι η διάσταση Hausdorff αυτών των συνόλων για οποιαδήποτε τιμή του θ είναι 1. Μπορεί ναδειχθεί ότι

Σχήμα 14.18: Ομοιότητες.



Σχήμα 14.19: Αυτοόμοια.



η τοπολογική διάσταση αυτών των συνόλων είναι 1 για $\theta = 0$ και 0 για όλες τις άλλες τιμές του θ . Άρα το αυτοόμοιο σύνολο για $\theta = 0$ δεν είναι fractal. Είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το $(0, 0)$ με το $(6, 6)$, ενώ τα όμοια με τον εαυτό τους σύνολα για όλες τις άλλες τιμές του θ είναι fractals. Ειδικότερα, είναι παραδείγματα fractals με ακέραια διάσταση Hausdorff.

14.7 Μια MONTE CARLO προσέγγιση

Η προσέγγιση σύνολο-σχεδίαση της κατασκευής των όμοιων με τον εαυτό τους υποσυνόλων που περιγράφονται στον προηγούμενο αλγόριθμο είναι μάλλον χάσιμο χρόνου για έναν υπολογιστή, επειδή οι σχετικές ομοιότητες πρέπει

να εφαρμοστούν σε κάθε ένα από τα πολλά pixels της οθόνης στα διαδοχικά σύνολα που προκύπτουν απ' τις επαναλήψεις. Το 1985 ο Michael Barnsley περιέγραψε μια εναλλακτική πρακτικότερη μέθοδο για τη δημιουργία ενός όμοιου με τον εαυτό του σύνολο που καθορίζεται μέσω των ομοιοτήτων του. Είναι μια μέθοδος αποκαλούμενη μέθοδος Monte Carlo επειδή εκμεταλλεύεται τη θεωρία πιθανοτήτων. Ο Barnsley την αναφέρει ως **τυχαίος αλγόριθμος επανάληψης**.

Ας είναι T_1, \dots, T_k οι συμβαλλόμενες ομοιότητες με ίδιο παράγοντα μεγέθυνσης s . Ο ακόλουθος αλγόριθμος παράγει μια ακολουθία σημείων

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \dots$$

που συγκλίνει στο σύνολο Σ του θεωρήματος.

Αλγόριθμος 2:

Βήμα 0: Επιλέγουμε ένα αυθαίρετο σημείο του Σ

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Βήμα 1: Επιλέγουμε τυχαία μια από τις k ομοιότητες, για παράδειγμα την T_{k_1} , και υπολογίζουμε το:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = T_{k_1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Βήμα 2: Επιλέγουμε τυχαία μια από τις k ομοιότητες, για παράδειγμα την T_{k_2} , και υπολογίζουμε το:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = T_{k_2} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

⋮

Βήμα n: Επιλέγουμε τυχαία μια από τις k ομοιότητες, για παράδειγμα την T_{k_n} , και υπολογίζουμε το:

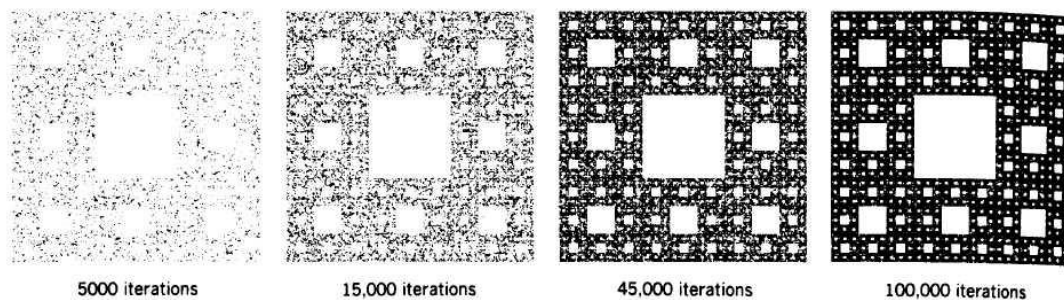
$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = T_{k_n} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

⋮

Σε μια οθόνη υπολογιστή τα pixels που αντιστοιχούν στα σημεία που παράγονται από αυτόν τον αλγόριθμο θα συμπληρώσουν τα pixels που αντιπροσωπεύουν το οριακό σύνολο Σ .

Η εικόνα ;; δείχνει τέσσερα στάδια του τυχαίου αλγορίθμου επανάληψης που παράγει το χαλί του Sierpinski, παίρνοντας ως αρχικό σημείο το $(0, 0)$:

Σχήμα 14.20: Αλγόριθμος επανάληψης.



Σχόλιο 142 Αν και το βήμα 0 στον προηγούμενο αλγόριθμο απαιτεί την επιλογή ενός αρχικού σημείου που να ανήκει στο σύνολο Σ , το οποίο δεν μπορούμε να το ξέρουμε εκ των προτέρων, αυτό δεν είναι ένα σοβαρό πρόβλημα. Στην πράξη, κάποιος μπορεί συνήθως να αρχίσει με οποιοδήποτε τυχαίο σημείο στον \mathbb{R}^2 και μετά από μερικές επαναλήψεις (π.χ. δέκα) το σημείο που παράγεται θα είναι τόσο κοντά στο σύνολο Σ που ο αλγόριθμος θα λειτουργήσει σωστά γι' αυτό το σημείο.

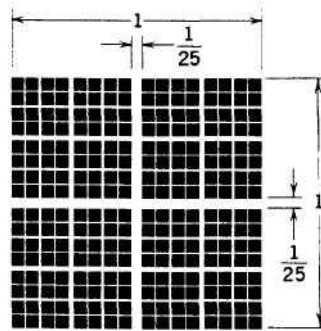
Μέχρι τώρα, έχουμε συζητήσει για fractals που είναι αυτοόμοια σύνολα σύμφωνα με τον ορισμό. Εντούτοις, το θεώρημα ισχύει ακόμη εάν οι ομοιότητες T_1, T_2, \dots, T_k αντικατασταθούν από πιο γενικούς μετασχηματισμούς, αποκαλούμενους αφηνικούς μετασχηματισμούς ([2]).

14.8 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Το αυτοόμοιο σύνολο στην επόμενη εικόνα δείχνει τα απαιτούμενα μεγέθη. Δεδομένου ότι η χαμηλότερη αριστερή γωνία είναι τοποθετημένη στην αρχή των αξόνων, βρείτε τις ομοιότητες που καθορίζουν το σύνολο. Ποια είναι η διάσταση Hausdorff; Είναι το σύνολο αυτό fractal;

2) **Το σύνολο του Cantor:** η κατασκευή του συνόλου του Cantor γίνεται σε άπειρα βήματα και περιγράφουμε αυτήν τη διαδικασία όπως φαίνεται στην επόμενη εικόνα.

Σχήμα 14.21:



Σχήμα 14.22: Cantor



Από το διάστημα $[0, 1]$ αφαιρούμε το μεσαίο τρίτο ($k = 1$). Από τα δύο εναπομείναντα διαστήματα αφαιρούμε τα δύο μεσαία τρίτα ($k = 2$). Από τα τέσσερα εναπομείναντα αφαιρούμε πάλι τα μεσαία τρίτα ($k = 3$). Η διαδικασία συνεχίζεται στο άπειρο. Το σύνολο που δημιουργείται ονομάζεται σύνολο του Cantor.

3) Οι δύο ομοιότητες

$$T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

καθορίζουν το fractal γνωστό ως σύνολο Cantor. Αρχίζοντας με το μοναδιαίο τετράγωνο U ως αρχικό σύνολο, σχεδιάστε τα πρώτα τέσσερα σύνολα που καθορίζει ο αλγόριθμος 1. Επίσης, βρείτε τη διάσταση Hausdorff του συνόλου

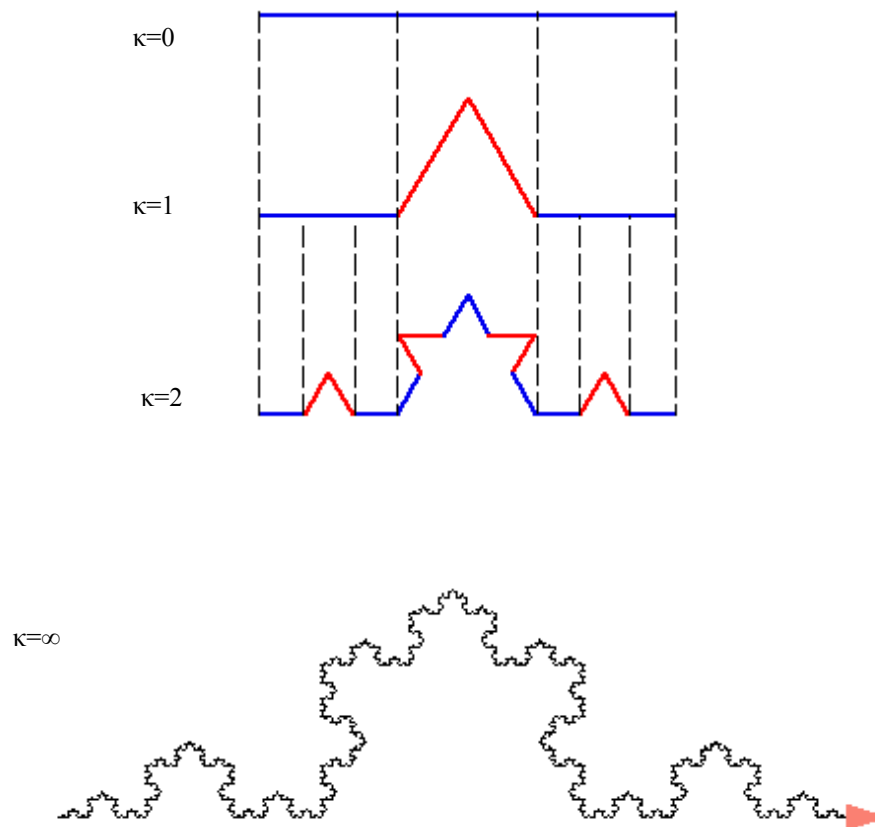
του Cantor.

Να βρεθεί η ευκλείδεια, τοπολογική, και Hausdorff διάσταση του συνόλου του Cantor.

Σημείωση. Αυτό το διάσημο σύνολο ήταν το πρώτο παράδειγμα που έδωσε ο Hausdorff στην εργασία του το 1919 ως σύνολο του οποίου η διάσταση Hausdorff δεν είναι ίση με την τοπολογική διάστασή του.

4) **Η καμπύλη του Koch** κατασκευάζεται με μία επαναληπτική διαδικασία όπως δείχνει η επόμενη εικόνα.

Σχήμα 14.23: Η καμπύλη του Koch



Αρχίζουμε από το μοναδιαίο διάστημα του οποίου αφαιρούμε το μεσαίο τρίτο, το οποίο αντικαθιστούμε δύο ίσα τμήματα (ένα τρίτο το κάθε ένα) σε σχήμα ισόπλευρου τριγώνου ($k = 1$).

Στο επόμενο βήμα το μεσαίο τρίτο αφαιρείται από κάθε ένα από τα τέσσερα τμήματα και αντικαθίσταται με δύο ίσα σε σχήμα ισόπλευρου τριγώνου όπως προηγουμένως ($k = 2$).

Η διαδικασία συνεχίζεται στο άπειρο.

α) Αν το μήκος της καμπύλης στο n βήμα είναι M_n , δείξτε ότι στο $n + 1$ βήμα είναι $\frac{4}{3}M_n$. Δείξτε ότι το τελικό μήκος είναι άπειρο.

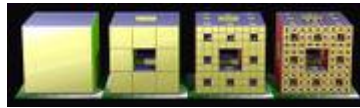
β) Παρατηρώντας το βήμα $n = 2$, δείξτε ότι είναι ένα αυτοόμοιο σχήμα με $k = 4$ και $s = 1/3$.

γ) Βρείτε την ευκλείδεια, τοπολογική, και Hausdorff διάσταση της καμπύλης του Koch.

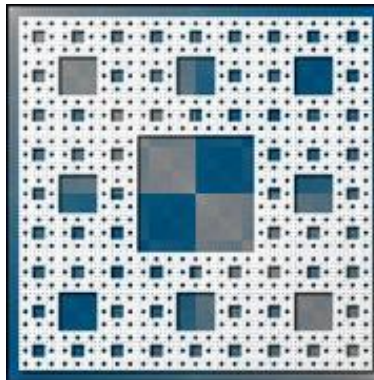
5) **Ο σπόγγος του Menger** κατασκευάζεται και αυτός με μία επαναληπτική διαδικασία όπως δείχνει η επόμενη εικόνα.

Σχήμα 14.24: Ο σπόγγος του Menger

$k=0$ $k=1$ $k=2$ $k=3$



Πρόσωση του κύβου για $k=5$



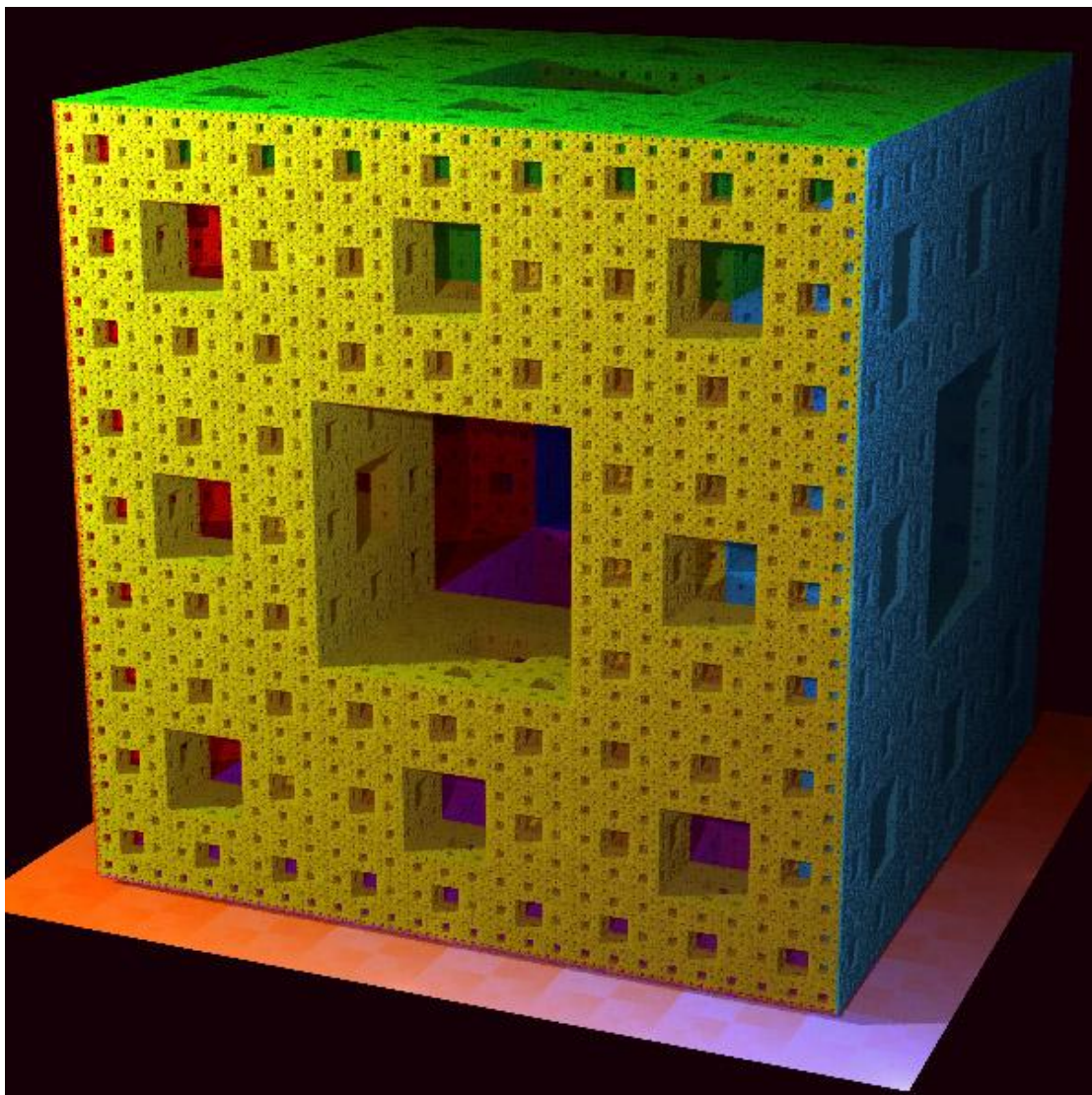
Ξεκινάμε από έναν μοναδιαίο κύβο τον οποίο θεωρούμε ότι δημιουργείτε από το 27 μικρότερους ακμής $1/3$. Από κάθε έδρα αφαιρούμε τον μεσαίο (δηλαδή 6) καθώς και αυτόν που βρίσκεται στο κέντρο του κύβου. Συνολικά

7 . Θα μπορούσαμε να πούμε ότι τον *τριπάμε* από άκρη σε άκρη στη μέση σε σχήμα μικρού κύβου ακμής $1/3$. Αυτό είναι το πρώτο βήμα ($k = 1$).

Τώρα έχουν μείνει 20 κύβοι ακμής $1/3$ και κάθε έναν τον χωρίζουμε σε μικρότερους ακμής $1/9$. Σε κάθε έναν από τους 20 κύβους εφαρμόζουμε την προηγούμενη διαδικασία οπότε παραμένουν $20 \cdot 20 = 400$ ($k = 2$).

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται στο άπειρο.

Σχήμα 14.25: Ο σπόγγος του Menger



α) Να δείξετε ότι ο σπόγγος του Menger είναι ένα αυτοόμοιο σχήμα με $k = 20$ και $s = 1/3$.

β) Βρείτε την ευκλείδεια, τοπολογική, και Hausdorff διάσταση του σπόγκου του Menger.

6) Δείξτε ότι οι τέσσερις ομοιότητες

$$\begin{aligned} T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ T_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} \\ T_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

εκφράζουν το μοναδιαίο τετράγωνο ως ένωση τεσσάρων επικαλυπτόμενων τετραγώνων. Υπολογίστε το

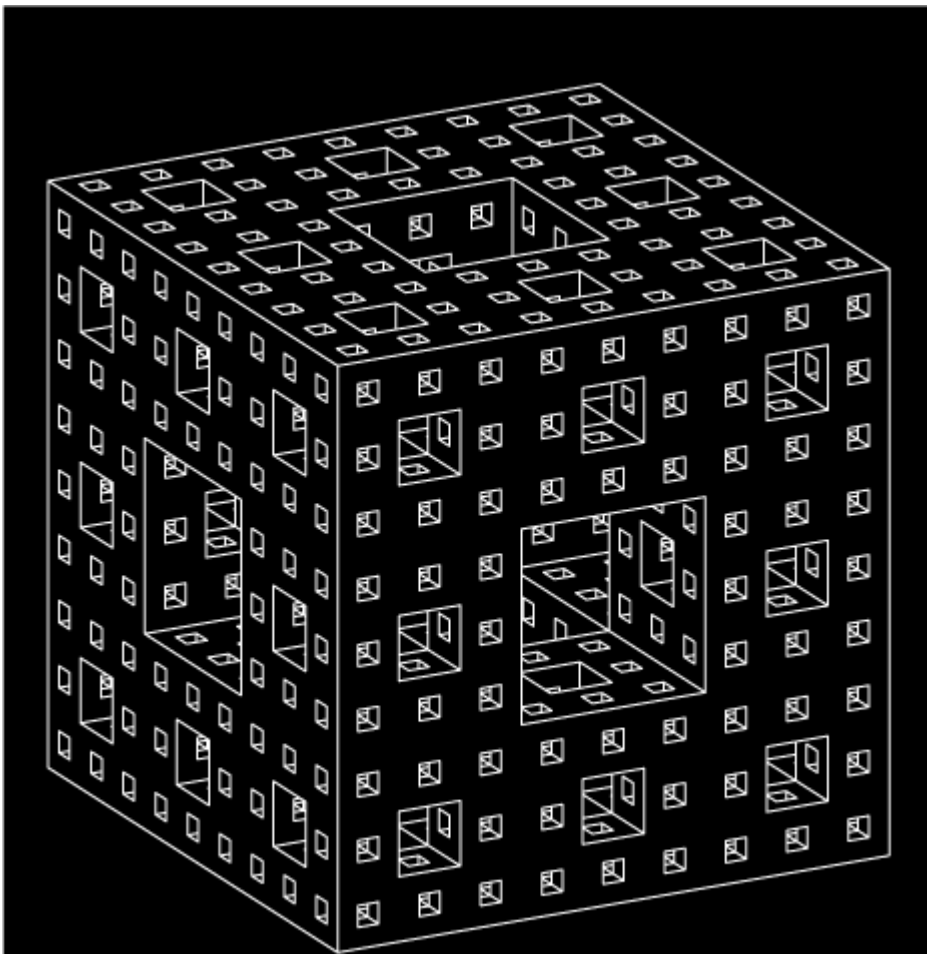
$$\ln k / \ln(1/s)$$

για τις τιμές του k και του s που καθορίζονται από αυτές τις ομοιότητες.

Δείξτε ότι το αποτέλεσμα δεν είναι η σωστή τιμή της διάστασης Hausdorff του μοναδιαίου τετραγώνου.

Σημείωση. Αυτή η άσκηση εμφανίζει την ανάγκη της προϋπόθεσης του μη-επικαλυπτόμενου συνόλου στον ορισμό ενός αυτοόμοιου συνόλου και της διάστασης Hausdorff.

Σχήμα 14.26: Ο σπόγγος του Menger



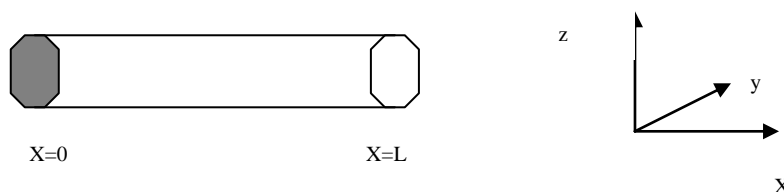
Κεφάλαιο 15

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

15.1 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ FOURIER

Ας μελετήσουμε την κατανομή της θερμοκρασίας ή της θερμικής ενέργειας σε μία ράβδο με διατομή επιφάνειας A σταθερή. Υποθέτουμε ότι η ράβδος είναι τοποθετημένη κατά τη διεύθυνση του άξονα x .

Σχήμα 15.1:



Ας είναι $u(x, t)$ η θερμοκρασία στη θέση x κατά τη χρονική στιγμή t . Υποθέτουμε εδώ ότι η συνάρτηση αυτή δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες y και z .

Προφανώς η ράβδος δεν θερμαίνεται ομοιόμορφα. Η θερμοκρασία λοιπόν είναι σταθερή σε κάθε διατομή A αλλά διαφέρει από διατομή σε διατομή. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η ράβδος είναι μονοδιάστατη. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με το να μπορέσουμε να μονώσουμε απολύτως την εξωτερική επιφάνεια της ράβδου. Άρα δεν έχουμε διαφυγή ή εισροή θερμικής ενέργειας από και προς τη ράβδο. Προφανώς κάποια διατομή μπορεί να είναι θερμότερη από κάποια άλλη.

Εκτός από τη θερμοκρασία, η θερμική ενέργεια της ράβδου είναι επίσης σημαντική. Τώρα από φυσική άποψη, η διαφορά των δύο αυτών εννοιών δεν είναι προφανής. Παραδείγματος χάριν, μπορεί να χρειάζεται διαφορετικές ποσότητες ενέργειας για να αυξηθεί η θερμοκρασία κατά 1 βαθμό σε δύο ράβδους από διαφορετικά υλικά. Αυτό περιγράφεται από τη **σταθερά θερμότητας** c η οποία ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 143 Σταθερά θερμότητας είναι η θερμική ενέργεια που χρειάζεται μία μονάδα μάζας ενός υλικού για να αυξηθεί η θερμοκρασία κατά μία μονάδα. Συμβολίζεται με c .

Η σταθερά θερμότητας εξαρτάται και από τη θερμοκρασία. Δηλαδή για να αυξηθεί η θερμοκρασία από μηδέν βαθμούς σε έναν βαθμό χρειάζεται διαφορετική ενέργεια από ογδόντα πέντε σε ογδόντα έξι βαθμούς. Αν επιπλέον το υλικό δεν είναι ομοιογενές, εξαρτάται και από τη θέση. Άρα είναι συνάρτηση δυο μεταβλητών

$$c = c(x, u)$$

Τα προβλήματα που αναφέρονται σε ροή θερμότητας είναι μαθηματικά πολύπλοκα. Ευτυχώς στα περισσότερα προβλήματα η μεταβολή της θερμοκρασίας δεν είναι τόσο μεγάλη. Συνήθως σε περιορισμένα διαστήματα θερμοκρασίας, ή c δεν εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Άρα $c = c(x)$.

Αν επιπλέον η ράβδος είναι ομοιογενής τότε είναι σταθερή.

Η θερμική ενέργεια η οποία περιέχεται σε ένα τμήμα ενός σώματος ορίζεται σαν την ενέργεια που χρειάζεται για να αυξηθεί η θερμοκρασία από τους μηδέν βαθμούς στους $u(x, t)$.

Υποθέτοντας ότι η c είναι ανεξάρτητη της θερμοκρασίας, η θερμική ενέργεια ανά μονάδα μάζας δίνεται από

$$c(x) u(x, t)$$

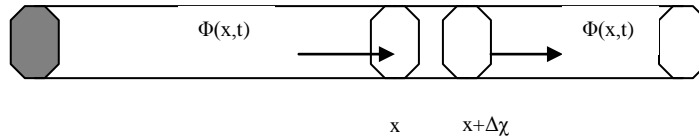
Για να υπολογίσουμε τη συνολική ενέργεια, απλώς πολλαπλασιάζουμε την $c(x) u(x, t)$ με τη μάζα. Επειδή οι συναρτήσεις c και $u(x, t)$ εξαρτώνται από το x , η ποσότητα $c(x) u(x, t)$ δεν είναι σταθερή.

Ας μελετήσουμε το μικρό τμήμα του υλικού που περιέχεται μεταξύ x και $x + \Delta x$. Αν η διαφορά Δx είναι αρκούντως μικρή, οι συναρτήσεις $c(x)$ και $u(x, t)$ δεν μεταβάλλονται σημαντικά. Άρα μέσα αυτόν τον όγκο, η ενέργεια ανά μονάδα μάζας $c(x) u(x, t)$ μπορεί να θεωρηθεί σταθερή. Η συνολική ενέργεια αυτού του τμήματος είναι το γινόμενο της θερμικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας επί τη μάζα.

Είναι γνωστό ότι η πυκνότητα δίνεται από

$$\rho(x) = \frac{\mu\alpha\zeta\alpha}{\sigma\gamma\kappa\omicron}$$

Σχήμα 15.2:



και μεταβάλλεται με το x , εκτός κι αν η ράβδος είναι ομοιογενής. Έχουμε λοιπόν την ενέργεια που περιέχεται σε αυτό το τμήμα να δίνεται από τον τύπο

$$\rho(x) A \Delta x c(x) u(x, t)$$

Η ποσότητα αυτή είναι μία προσέγγιση η οποία γίνεται περισσότερο ακριβής όσο το Δx μικραίνει.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για να μελετήσουμε τη μεταβολή της ενέργειας. Η ενέργεια μεταξύ x και $x + \Delta x$ αλλάζει ως προς το χρόνο επειδή υπάρχει ροή ενέργειας διαμέσου των τομών στα αντίστοιχα σημεία καθώς επίσης και από παραγωγή ενέργειας μέσα στο τμήμα της ράβδου από χημικές αντιδράσεις ή άλλους λόγους.

Ορίζουμε μία συνάρτηση $\Phi(x, t)$ η οποία περιγράφει τις μεταβολές.

Ορισμός 144 Με $\Phi(x, t)$ συμβολίζουμε την ποσότητα θερμικής ενέργειας ανά μονάδα χρόνου η οποία ρέει προς τα δεξιά κατά μήκος μίας μονάδας επιφάνειας στη θέση x .

Η $\Phi(x, t)$ καλείται **ροή θερμότητας** και μπορεί να είναι θετική, αρνητική η μηδέν.

Ορισμός 145 Με $Q(x, t)$ συμβολίζουμε την ποσότητα θερμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου η οποία παράγεται ανά μονάδα χρόνου.

Η πρωταρχική διαδικασία ροής θερμότητας περιγράφεται στην επόμενη εξίσωση

Αλλαγή θερμικής ενέργειας = ροή θερμικής ενέργειας κατά μήκος των συνόρων ανά μονάδα χρόνου + θερμική ενέργεια που παράγεται ανά μονάδα χρόνου.

Η αλλαγή αυτή για ένα μικρό τμήμα δίνεται από

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho(x) A \Delta x c(x) u(x, t)]$$

178ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Η ροή στη θέση x μπορεί να μην είναι ίση με την ροή στη θέση $x + \Delta x$. Επίσης η $\Phi(x, t)$ μετρά την ποσότητα ανά μονάδα επιφάνειας, άρα θα πρέπει να πολλαπλασιασθεί με A .

Η θερμική ενέργεια που παράγεται ανά μονάδα χρόνου δίνεται από $A\Delta x Q(x, t)$. Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε την επόμενη σχέση

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho(x) A \Delta x c(x) u(x, t)] \approx A\Phi(x, t) - A\Phi(x + \Delta x, t) + A\Delta x Q(x, t)$$

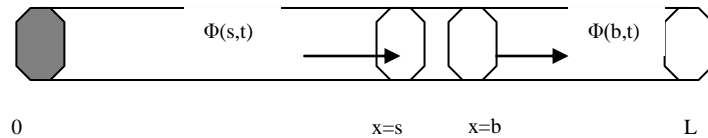
Η προηγούμενη προσέγγιση γίνεται ακριβέστερη όταν $\Delta x \rightarrow 0$. Έχουμε λοιπόν

$$\rho(x) c(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Phi(x, t) - A\Phi(x + \Delta x, t)}{\Delta x} + Q(x, t)$$

Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q$$

Σχήμα 15.3:



Επειδή η ποσότητα $\rho(x) A \Delta x c(x) u(x, t)$ δίνει την ενέργεια σε ένα μικρό τμήμα, η συνολική ενέργεια από τη θέση $x = a$ μέχρι την $x = b$ θα δίνεται από

$$\int_a^b \rho A c u dx$$

Η αλλαγή λοιπόν σε ένα τμήμα από το a στο b δίνεται από

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho c u dx = \Phi(a, t) - \Phi(b, t) + \int_a^b Q dx$$

Η αρχική μερική παράγωγος ως προς t έγινε κανονική γιατί η ποσότητα $\int_a^b \rho c u dx$ εξαρτάται μόνον από το t . Τα a και b δεν εξαρτώνται από το t και η u είναι συνεχής. Επίσης

$$\Phi(a, t) - \Phi(b, t) = -\int_a^b \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην εξίσωση

$$\int_a^b \left(\rho c \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} - Q \right) dx = 0$$

Επειδή η εξίσωση αυτή ισχύει για κάθε a και b θα έχουμε ότι

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q$$

Ο νόμος του Φουριερ αναφέρει

1) Αν η θερμοκρασία είναι σταθερή σε ένα τμήμα, δεν παρατηρείται ροή θερμότητας.

2) Αν υπάρχει διαφορά θερμοκρασίας, η ενέργεια ρέει από τις θερμότερες στις ψυχρότερες.

3) Όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά θερμοκρασίας, τόσο μεγαλύτερη είναι η ροή.

4) Η ροή εξαρτάται και από το υλικό.

Οι νόμοι του Φουριερ δίνουν τον ακόλουθο τύπο του Φουριερ

$$\Phi = -K_0 \frac{\partial u}{\partial x}$$

Ορισμός 146 Η σταθερά K_0 καλείται θερμική επαγωγή και εξαρτάται κατά κύριο λόγο από το υλικό.

Εξαρτάται όμως από τη θέση και τη θερμοκρασία όπως και η c

$$K_0 = K_0(x, u)$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις, όπως και η σταθερά θερμότητας, εξαρτάται μόνο από το ξ . Επίσης, αν το υλικό είναι ομοιογενές είναι σταθερά.

Εξίσωση θερμότητας: Αντικαθιστώντας τον τύπο του Φουριερ έχουμε

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + Q$$

Θέτοντας $k = \frac{K_0}{c\rho}$ έχουμε τον τύπο

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Για να λυθεί αυτή η μερική διαφορική εξίσωση, όπως και κάθε διαφορική εξίσωση, χρειάζονται αρχικές συνθήκες. Συνήθως έχουμε αρχικές συνθήκες για $t = 0$:

$$u(x, 0) = f(x)$$

Δηλαδή δίνεται η αρχική κατανομή θερμοκρασίας. Αυτή η συνθήκη δεν είναι αρκετή για τη λύση της εξίσωσης. Χρειάζεται να γνωρίζουμε και τις συνοριακές τιμές για $x = 0$ και $x = L$. Ακόμη περισσότερο, ανάλογα με το που βρίσκεται η ράβδος, πιθανόν να χρειάζεται κάποια από τις εξής συναρτήσεις:

- ι) $u(0, t)$
- ii) $-K_0(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = x(t)$
- iii) $K_0(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = H(u(0, t) - u(t))$

15.2 Κατανομή θερμότητας ανεξαρτήτως του χρόνου

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις c και K_0 είναι σταθερές κι ότι $Q(x, t)$. Τότε η συνάρτηση $u(x, t)$ ικανοποιεί την σχέση

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Σαν αρχικές συνθήκες έχουμε

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2$$

Αν τώρα η θερμοκρασία δεν εξαρτάται από το χρόνο, η εξίσωση γίνεται

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad u(0) = T_1, \quad u(L) = T_2$$

Δηλαδή έχουμε να λύσουμε μία συνήθη διαφορική εξίσωση

$$u(x) = c_1 x + c_2, \quad u(0) = T_1, \quad u(L) = T_2$$

η οποία γίνεται

$$u(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x$$

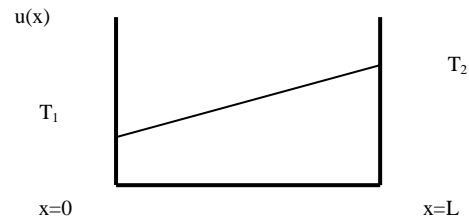
Κάτω λοιπόν από αυτούς τους περιορισμούς, η κατανομή θερμοκρασίας είναι απλή.

Ας μελετήσουμε το ίδιο ακριβώς πρόβλημα όπου η θερμοκρασία εξαρτάται από δύο μεταβλητές, το μήκος x και το πλάτος y :

Υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε σε κατάσταση ισορροπίας οπότε η συνάρτηση είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Σε αυτήν την περίπτωση η εξίσωση που Λαπλασε γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

Σχήμα 15.4:



Η λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης είναι δύσκολη ακόμα κι αν οι αρχικές συνθήκες είναι ευνοϊκές. Ας υποθέσουμε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι οι ακόλουθες

$$\begin{aligned} u(0, y) &= g(y) \\ u(L, y) &= u(x, 0) = u(x, H) = 0 \end{aligned}$$

Δίνουμε απλώς τη λύση χωρίς να την αποδείξουμε γιατί χρειάζεται αρκετή γνώση από την περιοχή των διαφορικών εξισώσεων:

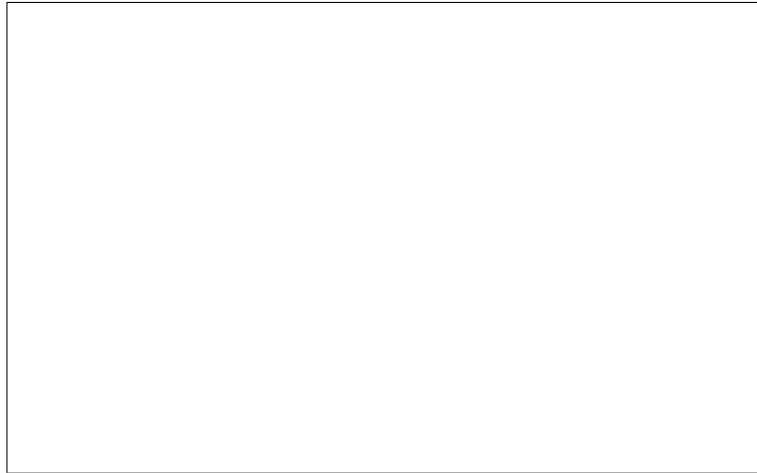
$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi y}{H} \sinh \frac{n\pi}{H} (x - L)$$

Όπου

$$A_n = \frac{2}{H \sinh \frac{n\pi}{H} (-L)} \int_0^H g(y) \sin \frac{n\pi y}{H} dy$$

Βλέπουμε ότι το πρόβλημα της κατανομής θερμοκρασίας στις δύο διαστάσεις γίνεται ιδιαίτερα δύσκολο σε σύγκριση με την μία διάσταση. Θα το αντιμετωπίσουμε προσεγγιστικά χρησιμοποιώντας μόνο ένα μεγάλο γραμμικό σύστημα.

Σε αυτό το μοντέλο θα περιοριστούμε σε σώμα σχήματος τραπεζοειδούς με μικρό πλάτος όπου η θερμοκρασία στις εξωτερικές έδρες του είναι καθορισμένη. Η κατανομή της θερμοκρασίας θα αναχθεί σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Επειδή τα συστήματα αυτού του είδους είναι ιδιαίτερα μεγάλα θα τα αντιμετωπίσουμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του **τυχαίου περιπάτου**.



Υποθέτουμε ότι οι δύο μεγάλες έδρες του είναι μονωμένες και η θερμοκρασία στις υπόλοιπες τέσσερις είναι δεδομένη όπως στο σχήμα. Επίσης, στο σχήμα δίνονται οι τρεις διαστάσεις του εκτός από το πάχος. Μετά από κάποια χρονική περίοδο η θερμοκρασία στο εσωτερικό σταθεροποιείται. Σκοπός μας είναι να βρεθεί η κατανομή θερμοκρασίας. Θα δούμε ότι η κατανομή αυτή καθορίζεται πλήρως από τη θερμοκρασία των εξωτερικών εδρών.

Αυτή η κατανομή η οποία δεν εξαρτάται από το χρόνο μπορεί να περιγραφεί από τις ισοθερμικές καμπύλες. Στο δεύτερο σχήμα βλέπουμε μερικές από αυτές. Το πρόβλημα έγκειται στο πως θα καθοριστούν αυτές οι καμπύλες.

Η τεχνική που θα χρησιμοποιήσουμε εφαρμόζεται και σε άλλα σχήματα καθώς και σε στέρεα μεγαλύτερου πάχους. Ουσιαστικά, αυτό που χρησιμοποιούμε εδώ είναι μία διατομή ενός στερεού. Επίσης, θεωρούμε ότι δεν υπάρχει η ροή θερμότητας από και προς τη συγκεκριμένη διατομή. Ο λόγος της εύρεσης των ισοθερμικών καμπυλών δεν είναι απλά θεωρητικός, αλλά αυτές καθορίζουν τις διαστολές που δέχεται το σώμα.

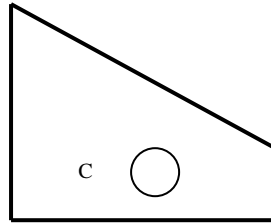
Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της Μέσης τιμής την οποία περιγράψουμε αμέσως.

Θεώρημα 147 *Έστω ότι ένα στερεό βρίσκεται σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας και P είναι ένα εσωτερικό σημείο. Αν Σ είναι ένας κύκλος κέντρου P μέσα στο σώμα, τότε η θερμοκρασία στο P δίνεται από το μέσο όρο της θερμοκρασίας πάνω στον κύκλο όπως στο σχήμα 15.5.*

Δεν θα αποδείξουμε το θεώρημα αυτό το οποίο είναι απόρροια της λύσης της εξίσωσης του Laplace σε πολικές συντεταγμένες με χωρισμό μεταβλητών, λαμβάνοντας φυσικά υπόψιν τις ανάλογες αρχικές συνθήκες.

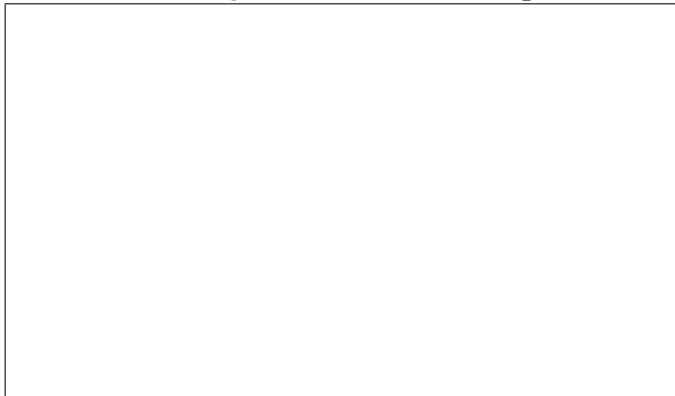
Με απλά λόγια το θεώρημα λέει ότι σε κατάσταση ισορροπίας η θερμοκρασία κατανέμεται ομοιόμορφα. Αυτό δεν σημαίνει ότι είναι εύκολο

Σχήμα 15.5:



να βρεθεί η κατανομή. Για να ξεπεράσουμε τις δυσκολίες, θα προσπαθήσουμε να βρούμε τη θερμοκρασία μόνο σε έναν πεπερασμένο αριθμό σημείων. Αυτός ο περιορισμός θα μας οδηγήσει σε ένα γραμμικό σύστημα.

Διαιρούμε λοιπόν το σχήμα μας σε λεπτότερα και λεπτότερα δίκτυα τετραγώνων όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα σημεία που δίνουν τις κορυφές των τετραγώνων καλούνται **κόμβοι δικτύου** (mesh points).



Το σύνολο αυτών των σημείων το χωρίζουμε σε αυτά που βρίσκονται πάνω στο σύνορο (συνοριακοί κόμβοι) και αυτά που βρίσκονται στο εσωτερικό (εσωτερικοί κόμβοι δικτύου). Σκοπός μας είναι να βρούμε τη θερμοκρασία στους εσωτερικούς κόμβους γνωρίζοντας τη θερμοκρασία στους συνοριακούς. Αν το δίκτυο που χρησιμοποιούμε είναι πολύ 'λεπτό' (οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι μικρές), τότε έχουμε μία πολύ καλή εικόνα της κατανομής.

Για να βρούμε τη θερμοκρασία στους εσωτερικούς κόμβους θα χρησιμοποιήσουμε μία διακριτή έκφραση του θεωρήματος της Μέσης τιμής.

Θεώρημα 148 *Η θερμοκρασία σε έναν εσωτερικό κόμβο ισούται με τον μέσο όλο των θερμοκρασιών των τεσσάρων γειτονικών κόμβων.*

Από την αριθμητική ανάλυση γνωρίζουμε ότι η προηγούμενη έκφραση του θεωρήματος Μέσης τιμής είναι μία προσέγγιση του κανονικού θεωρήματος

184 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

κι αν το εμβαδόν των τετραγώνων προσεγγίζει το μηδέν, τότε η θερμοκρασία σε έναν κόμβο προσεγγίζει την πραγματική κατανομή θερμοκρασίας σε αυτό το σημείο.

Περίπτωση 149 α). Εδώ υπάρχει μόνο ένας εσωτερικός κόμβος, οπότε η θερμοκρασία σε αυτό το σημείο δίνεται από την εφαρμογή του θεωρήματος της Μέσης τιμής

$$t_0 = \frac{1}{4}(2 + 1 + 0 + 0) = 0.75$$

Περίπτωση 150 β). Εδώ υπάρχουν εννέα εσωτερικοί κόμβοι οπότε έχουμε το ακόλουθο σύστημα

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{4}(t_2 + 2 + 0 + 0) \\ t_2 &= \frac{1}{4}(t_1 + t_3 + t_4 + 2) \\ t_3 &= \frac{1}{4}(t_2 + t_5 + 0 + 0) \\ t_4 &= \frac{1}{4}(t_2 + t_5 + t_7 + 2) \\ t_5 &= \frac{1}{4}(t_3 + t_4 + t_6 + t_8) \\ t_6 &= \frac{1}{4}(t_5 + t_9 + 0 + 0) \\ t_7 &= \frac{1}{4}(t_4 + t_8 + 1 + 2) \\ t_8 &= \frac{1}{4}(t_5 + t_7 + t_9 + 1) \\ t_9 &= \frac{1}{4}(t_6 + t_8 + 1 + 0) \end{aligned}$$

Σε μορφή πινάκων αυτό γίνεται

$$t = Mt + b$$

Όπου

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 3/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

Ισοδύναμα γράφουμε

$$t = (I - M)^{-1} b$$

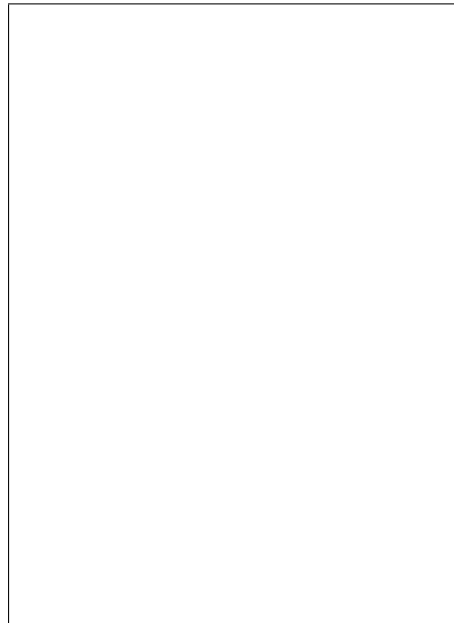
Παρατηρούμε ότι η νόρμα του πίνακα M είναι μικρότερη από 1. Άρα από τη θεωρία των οικονομικών μοντέλων έχουμε ότι

$$(I - M)^{-1} \approx I + M + M^2 + \dots + M^k$$

Βρίσκουμε λοιπόν ότι

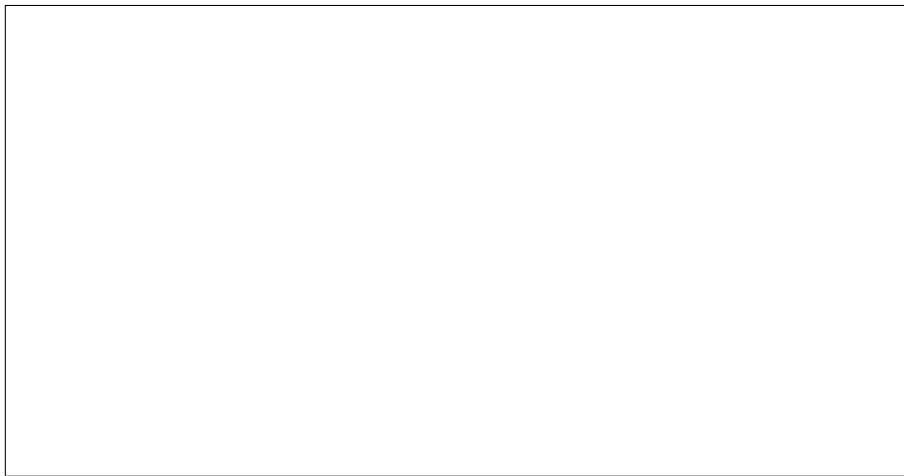
$$t = (I + M + M^2 + \dots + M^k) b$$

$$t = (0.7846, 1.1383, 0.4719, 1.2967, 0.7491, 0.3265, 1.2995, 0.9014, 0.557)^t$$



Είδαμε λοιπόν ότι για να υπολογίσουμε την κατανομή της θερμοκρασίας σε έναν αριθμό σημείων ενός στερεού πρέπει να επιλύσουμε ένα μεγάλο γραμμικό σύστημα. Τα συστήματα αυτά όπως είδαμε λύνονται προσεγγιστικά. Πολλές φορές δεν μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τη θερμοκρασία σε πολλά σημεία αλλά μεμονωμένα σε ένα για κάποιους τεχνικούς λόγους. Το πρόβλημα αυτό θα το αντιμετωπίσουμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του τυχαίου περιπάτου την οποία περιγράφουμε αμέσως.

Υποθέτουμε ότι ένας μεθυσμένος κινείται μία θέση δεξιά η αριστερά ανά μονάδα χρόνου με την ίδια πιθανότητα. Με Δx συμβολίζουμε το εύρος της κίνησης το οποίο είναι σταθερό και Δt το χρόνο που χρειάζεται για μία κίνηση ο οποίος είναι κι αυτός σταθερός. Το επόμενο τρίγωνο το οποίο καλείται τρίγωνο του Pascal δίνει τη κίνηση του ανθρώπου αυτού μαζί με την πιθανότητα για κάθε θέση.



Ο τυχαίος περίπατος είναι μία ανέλιξη Markov και επειδή εδώ έχουμε υποθέσει ότι η κίνηση είναι με πιθανότητα $1/2$ η ανέλιξη είναι επαναληπτική. Επιπροσθέτως δίνει τη διωνυμική κατανομή.

Ένας τυχαίος περίπατος

$$\Pi = (a_1, \dots, a_k)$$

είναι μία ακολουθία κινήσεων από ένα συγκεκριμένο εσωτερικό κόμβο a_1 η οποία σταματά όταν φθάσει σε κάποιο συνοριακό κόμβο a_k .

Το επόμενο θεώρημα είναι η εφαρμογή του θεωρήματος της Μέσης τιμής για την διακριτή περίπτωση. Η απόδειξη του γίνεται με ιδιότητες από τη θεωρία πιθανοτήτων.

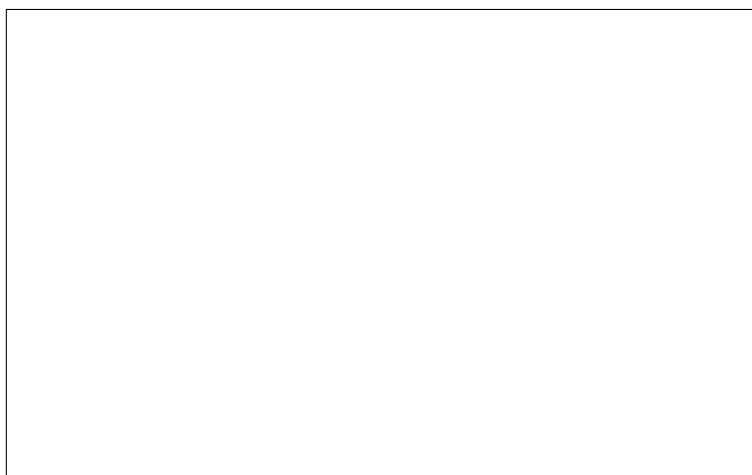
Θεώρημα 151 Τυχαίος περίπατος. Έστω $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ τυχαίοι περίπατοι από συγκεκριμένο εσωτερικό κόμβο και $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ οι θερμοκρασίες σε συνοριακούς κόμβους που καταλήγουν οι προηγούμενοι περίπατοι. Η μέση τιμή $\frac{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n}{n}$ αυτών των θερμοκρασιών προσεγγίζει την πραγματική θερμοκρασία του συγκεκριμένου εσωτερικού κόμβου καθώς το n μεγαλώνει.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Ένας τυχαίος περίπατος μπορεί να περιγραφεί από 4 βέλη

$$\leftarrow \downarrow \rightarrow \uparrow$$

Τα βέλη αυτά καθορίζουν τη κίνηση μεταξύ των κόμβων κατά μήκος ενός περιπάτου.

Ο επόμενος 10×10 πίνακας που περιέχει βέλη θα μας καθορίσει τυχαίους περιπάτους ως εξής.



Χρησιμοποιούμε τα δύο τελευταία ψηφία του τηλεφώνου μας ώστε να καθορίσουμε την αρχική θέση. Παραδείγματος χάρη, το 30 αντιστοιχεί στην τρίτη γραμμή και μηδενική στήλη δηλαδή \uparrow .

Πάντα θα ξεκινάμε από το σημείο 5 και θα κινούμαστε στο επόμενο ανάλογα με το αντίστοιχο βέλος το οποίο θα καθορίζεται από τον πίνακα μέχρι να φτάσουμε σε συνοριακό κόμβο.

Όταν φθάσουμε στο συνοριακό κόμβο καταγράφουμε την τιμή της θερμοκρασίας του και ξαναξεκινάμε από το 5 συνεχίζοντας την ακολουθία των βελών του πίνακα B από εκεί που σταματήσαμε.

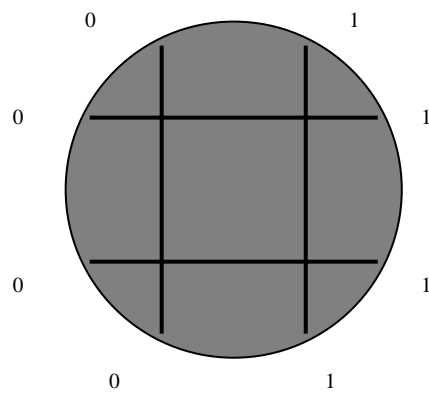
Η κίνηση που ακολουθούμε στον πίνακα B είναι σαν να ήταν τα βέλη λέξεις και να διαβάζαμε βιβλίο. Ακολουθούμε αυτή τη διαδικασία μέχρι να συμπληρωθούν δέκα περίπατοι και βρίσκουμε τη μέση τιμή των θερμοκρασιών που καταγράψαμε στους αντίστοιχους συνοριακούς κόμβους.

15.3 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Κάντε μια προσέγγιση της κατανομής θερμοκρασίας στο σχήμα (α) με ένα εσωτερικό σημείο για 5 βήματα. Προσπαθήστε να σχεδιάσετε ισοθερμικές καμπύλες.

2) Κάντε μια προσέγγιση της κατανομής θερμοκρασίας στο επόμενο σχήμα όπου δίνονται οι συνοριακές θερμοκρασίες.

Σχήμα 15.6:



Βιβλιογραφία

- [1] Chris Rorres and Howard Anton, *Applications of Linear Algebra*, John Wiley & Sons, Inc. 1977.
- [2] Michael Barnsley, *Fractals Everywhere*, New York: Academic Press, 1993.
- [3] Robert L. Devaney, *Introduction to chaotic dynamical systems*, 1986.
- [4] Geoffrey Heal, Gordon Hughes and Roger Tarling, *Linear Algebra and Linear Economics*, THE MACMILLAN PRESS LTD 1974.
- [5] John G. Kemeny, J. Laurie and Gerald L. Thomson, *Introduction to Finite Mathematics*, Prentice-Hall, 1966.
- [6] Benoit B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, New York, W. H. Free-man, 1982.
- [7] James R. Munkres, *Topology, a first course*, Prentice-Hall, 1975.
- [8] Heinz-Otto Peitgen and Dietmar Saupe, *The Science of Fractal Images*, New York, Springer-Verlag, 1988.
- [9] Walter Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York 1973.
- [10] Gilbert Strang, Γραμμική Άλγεβρα και εφαρμογές, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης 1996.

Ευρετήριο

- Leontief, 71
Rayleigh, 38
- Ανάθεση, 8
Αναμενόμενη τιμή, 61
Αυτοσωματική κληρονομικότητα, 94
- Βέλτιστη στρατηγική, 62
- Διάνυσμα κατάστασης, 50
Διάνυσμα πιθανότητας, 50
Δρόμος, 21
- Ευστάθεια, 54
- Φασματικό Θεώρημα, 36
- Γνησίως καθορισμένο, 63
Γράφος, 19
Γράφος Κυριαρχίας, 25
- Θεώρημα Peron-Frobenius, 43
- Κόστος, 8
Κατάσταση ισορροπίας, 53
Κλίκα, 23
- Λεσλιε, 81
- Μέθοδος Θασοβί Γαυσο-Σειδελ, 31
Μήκος, 21
Μαρκο, 50
- Νόρμα αθροίσματος, 41
Νόρμα μεγίστου, 41
Νόρμα Πίνακα, 41
Νόρμες ισοδύναμες, 41
- Ομφαλικό σημείο, 63
Ουγκαρέζικη Μέθοδος, 12
- Πίνακα μετάβασης, 50
Πίνακας απλά κανονικός, 53
Πίνακας Γεινίασης, 20
Πίνακας κόστους, 8
Πίνακας κανονικός, 53
Πίνακας κατανάλωσης, 74
Πίνακας Λεσλιε, 83
Πίνακας ορθογώνιος, 35
Πίνακας παιγνίου, 61
Πίνακας παραγωγικός, 75
Πίνακας Προσπελασιμότητας, 22
Πίνακας συγκομιδής, 88
Πίνακας συναλλαγής, 73
Παίγνιο, 59
Πιθανότητα μετάβασης, 50
- X-κληρονομικότητα, 97
- Στρατηγική, 61
Συμμετρικός Πίνακας, 35
Συνεκτικός Γράφος, 20
- Τύπος Euler, 27

Ευρετήριο

- Leontief, 71
Rayleigh, 38
- Ανάθεση, 8
Αναμενόμενη τιμή, 61
Αυτοσωματική κληρονομικότητα, 94
- Βέλτιστη στρατηγική, 62
- Διάνυσμα κατάστασης, 50
Διάνυσμα πιθανότητας, 50
Δρόμος, 21
- Ευστάθεια, 54
- Φασματικό Θεώρημα, 36
- Γνησίως καθορισμένο, 63
Γράφος, 19
Γράφος Κυριαρχίας, 25
- Θεώρημα Peron-Frobenius, 43
- Κόστος, 8
Κατάσταση ισορροπίας, 53
Κλίκα, 23
- Λεσλιε, 81
- Μέθοδος Θασοβι Γαυσο-Σειδελ, 31
Μήκος, 21
Μαρκο, 50
- Νόρμα αθροίσματος, 41
Νόρμα μεγίστου, 41
Νόρμα Πίνακα, 41
Νόρμες ισοδύναμες, 41
- Ομφαλικό σημείο, 63
Ουγκαρέζικη Μέθοδος, 12
- Πίνακα μετάβασης, 50
Πίνακας απλά κανονικός, 53
Πίνακας Γεινίασης, 20
Πίνακας κόστους, 8
Πίνακας κανονικός, 53
Πίνακας κατανάλωσης, 74
Πίνακας Λεσλιε, 83
Πίνακας ορθογώνιος, 35
Πίνακας παιγνίου, 61
Πίνακας παραγωγικός, 75
Πίνακας Προσπελασιμότητας, 22
Πίνακας συγκομιδής, 88
Πίνακας συναλλαγής, 73
Παίγνιο, 59
Πιθανότητα μετάβασης, 50
- X-κληρονομικότητα, 97
- Στρατηγική, 61
Συμμετρικός Πίνακας, 35
Συνεκτικός Γράφος, 20
- Τύπος Euler, 27